特殊解析函数

李书海 著

Special analytic functions

解析函数
单叶函数
多叶函数
单叶调和函数

$$(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{\alpha+i\mu}\prec p\frac{1+Cz}{1+Dz}$$

$$D_\lambda^n f(z)=D_\lambda^n h(z)+\overline{D_\lambda^n g(z)}$$

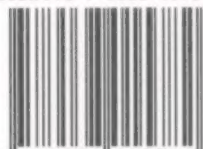
内蒙古科学技术出版社

解析函数
单叶函数
多叶函数
单叶调和函数

特殊解析函数

Special analytic functions

责任编辑：奥 奇
封面设计：永 胜



ISBN 978-7-5380-1578-2
9 787538 015782 >
定价：29.80元

特殊解析函数

李书海 著

内蒙古科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

特殊解析函数 / 李书海著. —赤峰:内蒙古科学技术出版社,2007.8
ISBN 978-7-5380-1578-2

Ⅰ.特… Ⅱ.李… Ⅲ.解析函数 Ⅳ.O174.55

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第128389号

出版发行/内蒙古科学技术出版社
地　　址/赤峰市红山区哈达街南一段4号
电　　话/(0476)8224848　8231924
邮　　编/024000
出 版 人/额敦桑布
组织策划/敖其尔
责任编辑/奥　奇
封面设计/永　胜
印　　刷/赤峰学院正兴印刷厂
字　　数/400千
开　　本/787×1092　1/16
印　　张/17
版　　次/2007年8月第1版
印　　次/2007年8月第1次印刷
定　　价/29.80元

前　言

解析单叶函数几何理论是复变函数的重要部分，其研究有较长的历史，19 世纪 Riemann 等人给它的发展奠定了理论基础. 几何函数论与其它相关学科，例如微分方程、解析数论、几何、拓扑学等有密切联系，并普遍应用于理论物理、力学、动力学和自动控制等方面，从而促进了它在 20 世纪的迅猛发展，取得了丰硕的成果，产生了具有深刻思想的研究方法. 近 20 年这一理论更向纵深发展，多叶函数和单叶调和函数便是它的拓广。

特殊解析单叶函数是几何函数论的重要研究内容. 我们主要研究了特殊解析函数，其中包括解析单叶函数，本书是著者在赤峰学院数学学院给高年级本科生讲授选修课《单叶函数选讲》的讲稿修改整理而成的. 全书共有四章，前两章和第三章的第一节是预备的基础部分，介绍了研究成果有关的某些基本理论和方法. 后两章中主要以专题形式介绍著者在该研究领域的研究成果，也参考了其它相关文献，指出其来龙去脉,详见参考文献.在第三章中主要给出用算子刻画的有关典型特殊函数的九类解析函数：用 D^{λ} 算子刻画的两类解析函数类、用复合算子定义的关于共轭点的解析函数类、与星象函数有关的两类解析函数、有关近于凸函数的解析函数类、用 D^{λ} 算子定义的缺系数的解析函数类、用 H^{λ} 算子定义的解析函数类,结合算子理论研究了这些函数类性质；第四章中主要介绍拓广的特殊解析函数的性质，其中有些结果还可以进一步改进或优化，某些函数类存在尚未解决的问题，有待更深入地研究. 在第二至四章后面均提出了对这些函数类进一步研究的相关问题，或给出尚未研究的新的特殊解析函数类。

衷心感谢我院赵业喜教授多年来在学术上对我的帮助与鼓励，他仔细审阅了书稿并提出很多宝贵的修改意见. 同时感谢我的同事赤峰学院数学学院的敖恩和张洪光老师对本书的出版所做的努力。

鉴于著者的水平有限，书中存在错误在所难免，谨请读者指正。

李书海

2007 年 4 月

目 录

前 言

第一章 单叶函数及其一些基本结果 1

§1.1 单连通区域的共形映射 1

§1.2 单叶函数的充要条件 11

§1.3 面积定理 覆盖定理 16

§1.4 偏差定理 旋转定理 23

§1.5 系数问题 26

§1.6 Lindelöf 原理 最大模增长方向 34

第二章 从属原理及特殊解析函数类 44

§2.1 从属原理 正实部函数 44

§2.2 星象函数 凸象函数 49

§2.3 近于凸函数 Bazilevic 函数 68

§2.4 函数类 $P_{\lambda,k}(A,B)$ 76

问 题 86

第三章 特殊解析函数类的研究 88

§3.1 算子理论及相关结果 88

§3.2 用 D^{λ} 算子刻画的解析函数类 $\mathrm{A}(\lambda,\alpha,\beta)$ 92

§3.3 用 D^{λ} 算子刻画的解析函数类 $J(\lambda,\alpha,\beta)$ 111

§3.4 函数类 $\mathrm{A}(\alpha,\beta,\mu)$ 和 $\mathrm{G}(\alpha,\beta,\mu)$ 的性质 116

§3.5 有关近于凸函数的解析函数类 $\mathrm{B}_{\lambda}(\alpha,\beta)$ 122

§3.6 用 D^{λ} 算子定义的缺系数的解析函数类 $Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$ 132

§3.7 用 H^{λ} 算子定义的解析函数类 144

§ 3.8　用复合算子定义的关于共轭点的解析函数类……153
§ 3.9 用 Salagean 算子刻画的 λ 阶 K 次对称单叶函数类……162
问　题……173
第四章　某些解析函数类的拓广……175
§ 4.1　有关 P 叶 α 级预星象函数的解析函数……175
§ 4.2　一类 γ 阶的 K 次对称 P 叶函数……184
§ 4.3　P 叶近于凸函数类的一个扩展……191
§ 4.4　关于缺系数的 p 叶 $\lambda-Bazilevic$ 函数类……200
§ 4.5　关于某类 p 叶解析函数……212
§ 4.6　用 Salagean 算子定义的单叶调和函数类……218
§ 4.7　用复合算子定义的单叶调和函数类……229
§ 4.8　用算子定义的缺系数的单叶调和函数类……242
问　题……255
参考文献……258

第一章 单叶函数及其一些基本结果

Riemann 映射定理是复变函数论中最基本、最重要的定理之一. 单叶函数是解析函数的重要部分，研究其几何性质是重要研究课题. 本章中主要介绍单叶函数的基本性质，证明 Riemann 映射定理. 其中有些基本结果在《复变函数》教科书中均可以找到，本章不予证明，直接给出.

§ 1.1 单连通区域的共形映射

在许多物理问题中，问题的求解一般与区域的形状有关. 本节中我们研究单叶函数的映射性质，使将复杂区域的问题转化为简单区域来解决. 这里只给出保形映射的一般性理论描述.

1. 单叶保形映射

首先介绍单连通区域的概念

定义 1.1.1 设 $\mathrm{D}\subset\mathrm{C}$（复数域），若 $\overline{\mathrm{C}}/\mathrm{D}$ 为连通集，即不能用两个不相交的非空开集将其一分为二，则称 D 为单连通区域. 不然，若 $\overline{\mathrm{C}}/\mathrm{D}$ 由几个连通分支集组成，则称 D 为多连通区域.

定义 1.1.2 设 $\mathrm{w}=f(z), z\in D$ 为解析函数. 若函数 $\mathrm{w}=f(z)$ 将区域 D 一一映射成区域 $f(D)$，则称 $\mathrm{w}=f(z)$ 为 D 上的单叶函数.

注 这里只介绍概念，将 § 1.2 中详细讨论单叶函数的性质.

定义 1.1.3 设 $\mathrm{w}=f(z)$ 为 D 上的映射. 若它在 D 内任意点具有保角和伸缩率不变性，则称 $\mathrm{w}=f(z)$ 为 D 上的保角映射；若保角映射 $\mathrm{w}=f(z)$ 为单叶的，则称 $\mathrm{w}=f(z)$ 为 D 上的保形映射.

定义 1.1.4 设 E,G 是两个区域，如果解析函数 $\mathrm{w}=f(z)$ 是 E 到 G 的单叶函数，

且$G=f(E)$，则称函数$f(z)$将E共形映射为G.

注 在解析区域内保形映射和共形映射是两个等价的概念.

定义 1.1.5 （局部一致收敛） 设函数列$f_n(z):D\to C,n\in N$, $f_n(z)$为区域D上的解析函数，若对$\forall z_0\in D$，$\exists U(z_0,\delta)$使得$\{f_n(z)\}$在闭域$\overline{U(z_0,\delta)}$上一致收敛于$f(z)$. 则称$\{f_n(z)\}$在D内局部一致收敛.

局部一致收敛和内闭一致收敛是两个等价的概念.

利用反证法，结合 Jordan 闭曲线和 Rouche 定理不难证明

定理 1.1.1 设函数列$f_n(z):D\to C,n\in N$, $f_n(z)$为区域D上的单叶函数，若函数列$\{f_n(z)\}$在D内局部一致收敛于$f(z)$，则$f(z)$为常数或者D内的单叶函数.

证 利用反证法. 设$f(z)$不是常数，且不是D内的单叶函数. 那么$\forall z_1,z_2\in D,z_1\neq z_2$,使得$f(z_1)=f(z_2)$. 因函数$f(z)$不是常数，从而此时存在包含在$D$内的 Jordan 闭曲线$\gamma$，曲线$\gamma$包含$z_1,z_2$两点，且在$\gamma$上$f(z)-f(z_1)\neq 0$. 令

$$\mu=\inf_{z\in\gamma}\{|f(z)-f(z_1)|\},$$

显然$\mu>0$. 当n充分大，使得$|f(z)-f(z_n)|<\mu\ (z\in\gamma)$，此时我们有

$$|f(z)-f(z_n)|<|f(z)-f(z_1)|,(z\in\gamma)$$

再根据 Rouche 定理可以得到，在γ的内部$f(z)-f(z_n)$和$f(z)-f(z_1)$有相同的零点个数，其中$f(z)-f(z_1)$至少有两个零点，这与$f_n(z)$的单叶性矛盾. 证毕.

1907 年 Monter 提出了解析函数的正规族概念：

定义 1.1.6（正规族） 设 $\mathrm{T}=\{f_\sigma:D\to C|\sigma\in B\}$为$D$上的解析函数类，若$\mathrm{T}$中的任意函数列，都包含一个在$D$内局部一致收敛的子序列. 则称$\mathrm{T}$为一个正规族.

利用紧集，等度连续和 Cauchy 不等式，从 Arzela 定理可以得到

定理 1.1.2（Monter 定理） 设$\mathrm{T}=\{f_\sigma:D\to C|\sigma\in B\}$为$D$上的解析函数类，$E$是

D 内的任意一个紧子集. 若 f_σ 在 E 上一致有界, 则T为 D 上的正规族.

显然单叶函数及其导函数都属于正规函数族.

单叶函数作为映射把单连通区域映射到单连通区域; 把多连通区域映射到多连通区域.

共形映射主要研究如下两个问题:

(1) 设解析函数 $\mathrm{w}=f(z)$, $\mathrm{z}\in D$, 讨论函数 $\mathrm{w}=f(z)$ 是否将区域 D 保形映射为区域 $\mathrm{G}=f(\mathrm{D})$; (2) 给定的两个区域 D 和 G, 讨论是否存在函数 $\mathrm{w}=f(z)$ 将 D 保形映射为 G.

2. Riemann 映射定理

Riemann 映射定理是近代复变函数几何理论的起点,并把复杂区域内的共形不变量的研究问题转化为较简单的区域内的问题, 然后利用共形映射就能得到所需要的结果. 为了证明 Riemann 映射定理, 需要如下几个引理, 这里只证明其中三个, 其余的证明见《复变函数》基础教程.

引理 1.1.1 (最大模原理) 若函数 $\mathrm{w}=f(z)$ 在区域 E 内解析, 且不为常数, 则 $|f(z)|$ 在区域 E 内取不到最大值.

引理 1.1.2(Schwarz 引理) 若 $\mathrm{w}=f(z)$ 是单位圆盘 $\mathrm{D}=\{z:|z|<1\}$ 内的解析函数, 满足条件 $f(0)=0, |f(z)|\le 1$, 则在 D 内 $|f(z)|\le|z|, |f'(0)|\le 1$, 等号只对函数 $f(z)=e^{i\theta}z$ 成立.

证 令 $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z}(z\in D, z\ne 0), \varphi(0)=f'(0)$, 则函数 $\varphi(z)$ 在D内是解析的.若 $r<1$, 则 $|\varphi(z)|$ 在圆盘 $|z|\le r$ 上的最大值取在圆周 $|z|=r$ 上, 故 $|\varphi(z)|\le\dfrac{1}{r}(|z|\le r)$, 固定 z, 令 $r\to 1$ 得 $|\varphi(z)|\le 1$. 由此即得所求的两个不等式.

假设在单位圆盘D内有一点 z_0, 使得 $|\varphi(0)|=1$, 则 $\varphi(z)$ 在 z_0 点取最大值, 因此 $\varphi(z)$ 必为常数 $\varphi(z)=e^{i\theta}$, 即 $f(z)=e^{i\theta}z$. 证毕.

利用 Cauchy 公式容易证明

引理 1.1.3（Weierstrass） 设$\{f_n(z)\}$是区域E内的解析函数列，它在E内内闭一致收敛于$f(z)$，则$f(z)$在E内是解析的，且对于每一个正整数$k\geq 1, f_n^{(k)}(z)$内内闭一致收敛于$f^{(k)}(z)$.

利用引理 1.1.3 得到如下引理：

引理 1.1.4（Hurwitz） 设$\{f_n(z)\}$是区域E内的解析函数列，它在E内内闭一致收敛于$f(z), f(z)\neq 0$；设有闭圆盘$\overline{\mathrm{D(a,R)}}=\{\mathrm{z}:|\mathrm{z\text{-}a}|\leq R\}\subset E$，在$|z-a|=R$上，$f(z)\neq 0$，则存在正整数$N$，使得$n\geq N$时，$f(z), f_n(z)$在圆盘$\mathrm{D(a,R)}$内有相同个数的零点.

证 由于在圆周$\Gamma:|z-a|=R$上，$f(z)\neq 0$，因此

$$\delta=\inf\{|f(z)|:z\in\Gamma\}>0.$$

而在Γ上$f(z)$一致收敛于$f_n(z)$，故存在正整数N_1，使得当$n\geq N_1$时，有$|f_n(z)|>\frac{\delta}{2}(z\in\Gamma)$. 所以对于$z\in\Gamma$，当$n\geq N_1$时，有

$$\left|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{f_n(z)}\right|=\left|\frac{f_n(z)-f(z)}{f(z)f_n(z)}\right|\leq\frac{2}{\delta^2}|f_n(z)-f(z)|$$

即$\frac{1}{f_n(z)}\to\frac{1}{f(z)}$，$z\in\Gamma$. 由引理 1.1.3 知，$f_n'(z)\to f'(z), z\in\Gamma$. 于是$\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\to\frac{f'(z)}{f(z)}, z\in\Gamma$. 由此得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_n'(t)}{f_n(t)}dt.$$

而$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_n'(t)}{f_n(t)}dt$只取整数值，故存在$N$，当$n\geq N$时，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_n'(t)}{f_n(t)}dt.$$

证毕.

引理 1.1.5 设E是复平面内的单连通区域，$w=\phi(z)$是E中的单叶解析函数，它将E映射为单位圆盘$\mathrm{D}=\{z:|z|<1\}$内的区域.若$\phi(E)$不与单位圆盘重合，且$z_0\in E$,则在E内存在一个单叶解析函数$\phi_1(z)$，将E映射为单位圆盘D内的区域.且$|\phi_1'(z_0)|>|\phi'(z_0)|$.

证 考虑单位圆盘映射为自身的映射

$$\varphi_t=\frac{z-t}{1-\bar{t}z}$$

其中复数t满足$|t|<1$. φ_t是单位圆盘到自身的一个双射，其逆映射φ_{-t}存在.

由已知条件，$\exists t,|t|<1,t\notin\phi(E)$,则$\varphi_t\circ\phi$是$E$内的单叶解析函数，且不为零.因此存在$E$内的解析函数$\psi(z)$，使得$\psi^2=\varphi_t\circ\phi$是内射. 设$\alpha=\psi(z_0),z_0\in E$.令$\phi_1=\varphi_\alpha\circ\psi$，容易证明$\phi_1$是$E$内的解析函数. 如果记$S(w)=w^2$，则有

$$\phi=\varphi_{-t}\circ S\circ\psi=\varphi_{-t}\circ S\circ\varphi_{-\alpha}\circ\phi_1.$$

又因为$\phi_1(z_0)=0$,根据复合函数的求导法则得到

$$\phi'(z_0)=H'(0)\phi_1'(z_0),H=\varphi_{-t}\circ S\circ\varphi_{-\alpha}.$$

由于H将单位圆盘映射为自身的真子集，根据引理 1.1.2，得到$|H'(0)|<1$,由此即得$|\phi_1'(z_0)|>|\phi'(z_0)|$. 证毕.

定理 1.1.3 （Riemann） 设E是复平面内的单连通区域，其边界至少含有两个不同的点. 任意给定一点$z_0\in E$,则存在唯一的解析单叶函数$g(z)$,将E映射为单位圆盘$|w|<1$，使得

$$g(z_0)=0, \arg g'(z_0)>0. \tag{1.1.1}$$

证 因为扩充复平面 $\hat{\mathrm{C}}$ 及平面 C 不能映射为单位圆盘. 所以假定 E 至少有两个边界点. 设 a,b 为 E 的两个不同的边界点. 当 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \neq \infty$ 是，变换 $(\mathrm{z}-\mathrm{a})/(\mathrm{z}-\mathrm{b})$ 将有边界点 $0,\infty$. 当 $\mathrm{b}=\infty$ 时，变换 $\mathrm{z}-\mathrm{a}$ 将 E 变为单连通区域 E_1，有边界点 $0,\infty$. 因此我们总可以假定 E 有边界点 $0,\infty$. 任意包围原点的简单连续闭曲线必与 E 的边界相交. 因为如果它整个在 E 内成为 E 的内点，则原点属于 E；同时它也不可能全都是 E 的外点，如果我们令 $z_1=\sqrt{z}$, 这个函数在 E 内有解析分支，因为当 z 在 E 内描绘一条闭曲线时，这条曲线不包围原点. 取定一个分支后，这个函数还是单叶的. 它将 E 共形映射为单连通区域 E_1. 若 $z_1=\mathrm{c}$ 是 E_1 的内点，则 $z_1=-\mathrm{c}$ 是 E_1 的外点.

$$z_2=\frac{1}{(z_1+c)}, \tag{1.1.2}$$

将 E_1 共形映射为有界单连通区域 E_2. 因此假定 E 是有界域. 变换 $z_3=z_2+d$ 将 E_2 共形映射为单连通区域 E_3，并选取 d 使得 E_3 含有原点 $z_3=0$, 它是 z_0 的像. 因此可以假定 E 是含有原点的单连通区域，还可以用旋转将映射函数的初始条件进行正规化：

$$f(0)=0, f'(0)>0. \tag{1.1.3}$$

用 T 表示在 E 内解析单叶，且满足条件(1.1.3)和 $|f(z)|<1(z\in E)$ 的函数 $f(z)$ 组成的类. 当 t 为充分小的正数时 $\mathrm{tz}\in\mathrm{T}$，所以 $\mathrm{T}\neq\phi$. 下面我们利用引理 1.1.5 讨论函数类 T 的一个极值问题：找一个函数 $\mathrm{f}(\mathrm{z})\in\mathrm{T}$，使得 $f'(0)$ 最大可能的值. 因为 E 含有原点，所以 E 必含有一闭圆盘 $|z|\le\rho, \rho>0$. 对 $\forall f(z)\in T$, 由条件 $|f(z)|<1(z\in E)$ 和 Cauchy 公式得 $f'(0)<(1/\rho)$. 因此正数集合 $\{f'(0): f(z)\in T\}$ 是有界的. 令

$$\mu = \sup_{f \in T}\{f'(0)\}. \tag{1.1.4}$$

下面要证明存在一个 $g(z) \in T$，使得 $g'(0) = \mu$. 并验证函数 $g(z) \in T$ 为所求的映射函数.

因为 $f(z)$ 在 E 内解析单叶函数且 $|f(z)| < 1(z \in E)$，所以 T 为正规族. 因 μ 为上确界，对于任意正整数 $n, f_n(z) \in T$, 使得 $f_n'(0) \ge \mu - \frac{1}{n}$. 设函数列 $\{f_n(z)\}$ 的收敛子序列为 $\{f_{n_k}(z)\}$，则有 $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(0) = \mu$. 且 $\{f_n(z)\}$ 在 E 中内闭一致收敛于 $g(z)$，$g'(0) = \mu$.

由引理 1.1.3 知 $g(z)$ 在 E 内解析且满足（1.1.3），$g(z)$ 不是常数，有引理 1.1.1 可知 $g(z)$ 满足 $|g(z)| < 1(z \in E)$；

利用反证法证明函数 $g(z)$ 在 E 内的单叶性，假设 $g(z)$ 在 E 内不是单叶，由单叶函数的定义在 E 内存在不同的两点 z_1, z_2 使得 $g(z_1) = g(z_2)$, 则在 z_1, z_2 的邻域内，利用引理 1.1.4，对充分大的 $n, f_n(z)$ 分别在两个邻域中取相同的值，于是 $f_n(z)$ 不是单叶的，故 $g(z)$ 是单叶的，由此得到 $g(z) \in T$. 根据引理 1.1.5，$g(z)$ 把 E 映射为整个单位圆盘 $|w| < 1$.

下面要证明映射函数的唯一性. 假设还有一个函数 $w = G(z)$ 也将 E 共形映射为单位圆盘 $|w| < 1$. 且满足（1.1.3）式. 函数 $F(w) = G[g^{-1}(w)]$ 将 $|w| < 1$ 共形映射为为自身，由引理 1.1.2，$|F(w)| \le |w|$ 即 $|G(z)| \le |g(z)|$.交换 $G(z)$ 和 $g(z)$ 的地位，又得到 $|g(z)| \le |G(z)|$，由此推出 $|g(z)| = |G(z)|$. 又因为 $G(z)/g(z)$ 在 E 内是解析的，$|G(z)/g(z)| \equiv 1$, 利用引理 1.1.1 可知 $g(z) = G(z)$. 证毕.

除了下列两种情况：（1）区域是全平面；（2）区域是全平面除去一点外其余任

意单连通区域都能映射到单位圆盘$D=\{z:|z|<1\}$上.

定义 1.1.7 （映射半径） 设$f_0(z)$是 Riemann 定理中的单叶函数，且满足$f_0(z_0)=0, f_0'(z_0)>0$, 则$f(z)=\dfrac{f_0(z)}{f_0'(z)}$, $f(z_0)=0, f'(z_0)=1$, 并将E单叶映射为单位圆盘D. 那么称 $R=\dfrac{1}{f_0'(z_0)}$ 为区域E在点z_0处的映射半径.

3. 边界对应定理

Riemann 映射定理中没有涉及到：当解析单叶函数把单连通区域E共形映射为单位圆D时，区域的边界之间有何关系. 即单连通区域E到单位圆D的共形映射函数$w=f(z)$，能否扩充为$\overline{E}\to\overline{D}$同胚映射. 这时区域$E$的边界起了决定性的作用. 这里只叙述不同形式的边界对应定，证明详见文[6][7].

定理 1.1.4 设E是一条简单闭曲线Γ所围成的区域. 若函数$w=f(z)$将E共形映射为单位圆盘D，则$w=f(z)$可延拓到Γ上，使得$f(z)$在区域$\overline{E}$上连续，并且建立起$\overline{E}$到$\overline{D}$的一同胚映射.

定理 1.1.4 存在逆定理:

定理 1.1.5 设E和E^*是给定的两个单连通区域，E^*是有界. 如果函数$w=f(z)$在E内解析，在$\overline{E}$上连续，$\partial E^*=f(\partial E)$同向的双方单值映射，则$w=f(z)$是$\overline{E}\to\overline{E}^*$的单叶映射.

证 由已知条件，只须证明$w=f(z)$在E内单叶即可. 令 $w_0\neq f(\partial E)$, 由辐角原理可知，$f(z)$在E内取值为w_0的个数等于

$$N(w_0)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial E}\arg\{f(z)-w_0\}.$$

由于∂E^*与∂E是双方单值的，且保持方向相同，从而有

$$\Delta_{\partial E}\arg\{f(z)-w_0\}=\Delta_{\partial E^*}\arg\{w-w_0\}.$$

$$N(w_0)=\begin{cases}1, w_0\in E^*;\\ 0, w_0\notin E^*.\end{cases}$$

即 $f(z)$ 在 E 内取 E^* 中的每一个值正好一次，亦 $w=f(z)$ 是 $\bar{E}\to\bar{E}^*$ 的单叶映射. 证毕.

定理1.1.6 设 $w=f(z)$ 是单连通区域 E 到单位圆盘 D 的共形映射. 对于每一个可达边界点 z，对应于单位圆周 $|w|=1$ 上确定的点 W，使得当 z 在 E 内沿着确定 z 的曲线 L 趋于 z 时，相应的 $w=f(z)$ 趋于 W. E 的两个不同的可达边界点对应于 $|w|=1$ 上的两个不同点. 若 F 是 $|w|=1$ 对应于 E 的可达边界点的点集，那么 F 在 $|w|=1$ 上处处稠密的.

4. 特殊映射

（1）分式线性映射

分式线性映射是理论上和应用中重要的一类映射，在实际应用中可利用它来做出具体区域间的映射.

函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d},a,b,c,d\in C,ad-bc\neq 0. \quad (1.1.5)$$

称为分式线性映射. 当 $ad-bc=0$ 时， w 为常数或无意义.

显然（1.1.5）中，参数 $a,b,c,d\in C$，分别取特殊值时，得到四个基本映射：

平移映射 $w=z+\beta(\beta\in C)$; 旋转映射 $w=e^{i\theta}z(\theta\in R)$; 相似映射 $w=rz(r>0)$;

反演映射 $w=\frac{1}{z}$. 反之，任意分式线性映射均可用以上四个基本映射的复合表示. 线性映射的逆映射还是线性映射. 分式线性映射具有保角、保圆、保对称性和保交比不性.

若将复平面上的直线视为过无穷远点的圆周，则线性变换有如下基本性质

定理 1.1.7 设 w 为分式线性映射，则 （1） w 把圆周映为圆周；（2） $(z_1,z_2,z_4,z_3)=(w_1,w_2,w_4,w_3)$.（3）线性映射 w 把关于圆周 L 的对称点 z_1,z_2 映射为

像圆周Γ的对称点w_1, w_2；（4）线性映射将z平面上的互异三点$z_k\left(k=1,2,3\right)$，映射为w平面上给定的相异三点 $w_k\left(k=1,2,3\right)$.

几种典型区域之间的分式线性映射：

I. $\operatorname{Im} z>0 \Rightarrow \operatorname{Im} w>0$（上半平面映射成上半平面）

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d\in R, ad-bc>0.$$

II. $\operatorname{Im} z>0 \Rightarrow |w|<1$（上半平面映射成单位圆的内部）

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}, \theta\in R, \operatorname{Im}\alpha>0.$$

III. $|z|<1 \Rightarrow |w|<1$（单位圆的内部映射成单位圆的内部）

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \theta\in R, |\alpha|<1.$$

IV. $\operatorname{Re} z>0 \Rightarrow |w|<1$（右半平面映射成单位圆的内部）

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}, \theta\in R, \operatorname{Re}\alpha>0.$$

（2）单位圆映射为由 n 条射线构成的“星形”的外部的映射

$$w=\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\frac{\left(1+z^n\right)^{\frac{2}{n}}}{z}, |w|\le 1, \arg w=\left(k-1\right)\frac{2\pi}{n}, k=1,2,\cdots,n.$$

当$n=2$时，得到

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

称之为儒科夫斯基映射.它将单位圆内部映射为除去闭区间$\left[-1,1\right]$外的复平面.

§ 1.2 单叶函数的充要条件

1. 单叶函数的定义、必要条件

定义 1.2.1 设 $w=f(z)$ 是区域 E 内的解析函数，若对 $\forall z_1,z_2\in E, z_1\neq z_2$ 时，有 $f(z_1)\neq f(z_2)$，则称 $f(z)$ 是 E 内的单叶函数.

定理 1.2.1 设单叶函数 $w=f(z)$ 将区域 E 映射为区域 G，$\varphi(w)$ 是 G 内的单叶函数，则复合函数 $\varphi[f(z)]$ 是 E 内的单叶函数.

证 显然 $\varphi[f(z)]$ 是 E 内的解析函数. 对 $\forall z_1,z_2\in E, z_1\neq z_2$，由于 $f(z)$ 的单叶性可知，$w_1=f(z_1)\neq f(z_2)=w_2, w_1,w_2\in G$. 又因为 $\varphi(w)$ 是 G 内的单叶函数，所以我们有

$$\varphi[w_1]=\varphi[f(z_1)]\neq\varphi[f(z_2)]=\varphi[w_2].$$

故函数 $\varphi[f(z)]$ 是 E 内的单叶函数. 证毕.

定理 1.2.2 若 $w=f(z)$ 是区域 E 内的单叶函数，则在 E 内的任意点 $z\in E, f'(z)\neq 0$.

注 条件 $f'(z)\neq 0(z\in \mathrm{E})$ 不是充分条件. 例如 $f(z)=e^z$，对任意的 z，均有 $f'(z)=e^z\neq 0$，但 $f(z+2k\pi i)=f(z)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

证 用反证法，令 $w=f(z)$ 把 E 映射为 $E', E'=f(E)$. 若有一点 $a\in E$，使 $f'(a)=0$，则 a 也是 $f(z)-f(a)$ 的一个 n 极零点 $(n\geq 2)$. 由零点的孤立性，存在 $\rho>0$，使在圆周 $\Gamma:|z-a|=\rho$ 上及 Γ 的内部，$f(z)-f(a)$ 及 $f'(z)$ 无异于 a 的零点.

设 m 表示 $|f(z)-f(a)|$ 在 Γ 上的下确界，对于模小于 m 的任一复数

$-\alpha=\varphi(z), 0<|-\alpha|<m$. 由 Rouch$e'$ 定理可知 $f(z)-f(a)+\varphi(z)$ 与 $f(z)-f(a)$ 在 Γ 内部恰有 n 个零点，即 $f(z)=f(a)+\alpha$ 在 Γ 内部恰有 n 个根，而 $f'(z)$ 在 Γ 内除 a 外均不为零. 所以这 n 个根都是单根. 由此推出在 $|z-a|<\rho$ 内有 n 个不同的点都取值为 $f(a)+\alpha$，这与 $w=f(z)$ 是区域 E 内的单叶性矛盾. 所以在 E 内的任意点 $f'(z)\neq 0$. 证毕.

2. 单叶函数的充分条件

定理 1.2.3 若 $w=f(z)$ 在 $z=a$ 解析且 $f'(a)\neq 0$, 则存在 $\delta>0, f(z)$ 在 $|z-a|<\delta$ 内单叶.

证 令 $w_0=f(a)$, 因 $f'(a)\neq 0$, 显然 a 是 $f-w_0$ 的一级零点，由零点的孤立性可知，存在 $\delta>0$, 使 $f(z)$ 在圆周 $\Gamma:|z-a|=\delta$ 内没有异于 a 的零点，设 m 是 $|f(z)-w_0|$ 在 Γ 上的下确界，取 w 使 $|w-w_0|<m$, 由 Rouch e' 定理可知 $f(z)-w=(f(z)-w_0)+(w_0-w)$ 与 $f(z)-w_0$ 在 Γ 的内部有相同的零点，即 $f(z)-w$ 在 Γ 的内部只有一个零点，故存在 $\delta>0, f(z)$ 在 $|z-a|<\delta$ 内单叶. 证毕.

定理 1.2.3' 设 $w=f(z)$ 在 $|z-a|<r$ 内解析，若 $z\neq a$ 时，$|f'(z)-f'(a)|<f'(a)$，则 $f(z)$ 在 $|z-a|<r$ 内单叶.

证 设 z_1, z_2 是圆盘 $|z-a|<r$ 内的任意两个不同点，则

$$
\begin{aligned}
|f(z_1)-f(z_2)| &= \left|\int_{z_1}^{z_2} f'(z)dz\right| \\
&= \left|\int_{z_1}^{z_2} f'(a)dz+\int_{z_1}^{z_2}\left[f'(z)-f'(a)\right]dz\right| \\
&\geq |f'(a)||z_2-z_1|-\left|\int_{z_1}^{z_2}\left[f'(z)-f'(a)\right]dz\right|
\end{aligned}
$$

$$\geq |f'(a)||z_2 - z_1| - \int_{[z_1,z_2]} |f'(z) - f'(a)||dz|$$

$$> |f'(a)||z_2 - z_1| - |f'(a)||z_2 - z_1| = 0.$$

所以$|f(z_1) - f(z_2)| > 0$, 即 $f(z_1) \neq f(z_2)$. 证毕.

定理 1.2.4 若$\{f_n(z)\}(n \in N)$是单连通区域E内的单叶函数序列，且在E内内闭一致收敛于$f(z)$. 则$f(z)$在E内也是单叶的.

证 利用反证法. 设$f(z)$在E内不单叶，则E内存在两点$z_1, z_2 \in E, z_1 \neq z_2$，使得

$$f(z_1) = f(z_2).$$

不妨设 z_1, z_2是有限点，分别以z_1, z_2为圆心做两个小圆o_1, o_2，其边界为Γ_1, Γ_2，使$\{o_1 \cup \Gamma_1\} \cap \{o_2 \cup \Gamma_2\} = \phi$, $\{o_1 \cup \Gamma_1\} \subset E, \{o_2 \cup \Gamma_2\} \subset E$, 而$f(z) - f(z_1)$在$\{o_1 \cup \Gamma_1\}$或$\cap\{o_2 \cup \Gamma_2\}$上除$z_1, z_2$外无其他零点. 故存在$\delta > 0$, 当$z \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$时，$|f(z) - f(z_1)| > \delta$; 另一方面，由定理条件知$\{f_n(z)\}(n \in N)$在$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$上一致收敛于$f(z)$，故存在正整数$N$，当$n > N$时，$|f_n(z) - f(z)| < \delta, z \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. 由 Rouché 定理可知 $f_n(z) - f(z_1) = (f(z) - f(z_1)) + (f_n(z) - f(z)), n > N$在两个小圆$o_1, o_2$中都至少有一个零点，这与$\{f_n(z)\}(n \in N)$是单连通区域$E$内的单叶函数序列矛盾，从而$f(z)$在$E$内也是单叶的. 证毕.

我们用符号A表示在单位圆盘$D = \{z : |z| < 1\}$内解析函数$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$组成的函数类，$S$表示$A$中的单叶函数子类. 用$\Sigma$表示在$\Delta = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$内除$\zeta = \infty$外的解析单叶函数$F(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{-n} z^{-n}$全体. S和Σ有如下关系：

$$f(z)\in S\Rightarrow\frac{1}{f\left(z^{-1}\right)}\in\Sigma.$$

若对于$\forall k\in N,\varepsilon_k=e^{2\pi i/k}$满足条件$f(\varepsilon_k z)=\varepsilon_k f(z)$，则称$f(z)$为$k$次对成单叶函数 ，其全体记为$S_k$. S_k中函数具有形式$f_k(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{nk}z^{nk}$，$S_k$与$S$之间有一一对应关系，且

$$f(z)\in S,f_k(z)\in S_k\Rightarrow f\left(z^k\right)=\left(f_k(z)\right)^k.$$

定理 1.2.5 设$f(z)\in A$,且$\sum\limits_{n=2}^{\infty}na_n\le 1$, 则$f(z)$在D内单叶.

证 对于D内的任何相异的两点z_1,z_2,由于$\sum\limits_{n=2}^{\infty}na_n\le 1$,因之

$$\begin{aligned}\left|f(z_1)-f(z_2)\right|&=\left|(z_1-z_2)\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\left(z_1^{n-1}+\cdots+z_2^{n-1}\right)\right]\right|\\&\ge\left|z_1-z_2\right|\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\left|a_n\right|\left(\left|z_1\right|^{n-1}+\left|z_1\right|^{n-2}\left|z_2\right|+\cdots+\left|z_2\right|^{n-1}\right)\right]\\&>\left|z_1-z_2\right|\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right|\right]\ge 0.\end{aligned}$$

即$f(z_1)\ne f(z_2)$,所以$f(z)$在D内单叶. 证毕.

定理 1.2.6 设Γ为简单闭曲线，它的内部为区域E，$w=f(z)$在$\bar{E}=E\cup\Gamma$上解析，且在Γ上取任何值不多于一次，则$f(z)$在E内单叶.

证 设函数$w=f(z)$将Γ映射为w平面上的曲线C，因为$w=f(z)$连续，所以C也是闭曲线.其内部设为G.又因$f(z)$在Γ上解析，C也是简单闭曲线.

假设$z_0\in E$,由保形性$w_0=f(z_0)\notin C$,从辐角原理知，$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\left[f(z)-f(z_0)\right]$等于$f(z)-f(z_0)$在$\Gamma$内零点的个数$k$（其中$\Gamma$取正方向）. 因为在$E$内已有一个$z_0$，

k 是一个正整数，$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg\left[f(z)-f(z_0)\right]=k$, 但它当 $w_0\notin C$ 时为零，$w_0\in C$ 时，$k=\pm1$. 所以 $k=1$，故 w_0 落在 C 内部，且 C 取正向，于是 $f(z)$ 在 E 中取 $f(z_0)=w_0$ 的值只能一次，因此 $f(z)$ 在 E 内单叶. 证毕.

Nehari 利用线性微分方程的方法给出单叶判别准则，详见文[8]：

定理 1.2.7 设函数 $f(z)$ 在D 内局部单叶，即 $f'(z)\neq 0(z\in D)$, 令

$$q(z)=\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2, \tag{1.2.1}$$

则 $f(z)$ 在D 内单叶的充要条件是方程

$$\omega''(z)+q(z)\omega(z)=0, \tag{1.2.2}$$

的每一个非平凡解，在D 内至少有一个零点.

证 令 $u(z)=\omega(z)\left(f'(z)\right)^{\frac{1}{2}}$, 则由（1.2.1）式，把方程（1.2.2）化为

$$u''(z)-\frac{f''(z)}{f'(z)}u'(z)=0, \tag{1.2.3}$$

且具有一般解 $u(z)=\alpha f(z)+\beta$. 但方程（1.2.3）的每一个非平凡解在D 内至少有一个零点的充要条件为 $f(z)$ 在D 内单叶，故结论得证.

例 1.2.1 证明 函数 $f(z)=\frac{z}{\left(1-e^{i\theta}z\right)^2}(z\in D,\theta\in R)$ 是单叶函数.

证 用反证法. 假设若有两个点 $\forall z_1,z_2\in D, z_1\neq z_2$，使得 $f(z_1)=f(z_2)$. 即

$$\frac{z_1}{\left(1-e^{i\theta}z_1\right)^2}=\frac{z_2}{\left(1-e^{i\theta}z_2\right)^2}\Leftrightarrow z_1z_2e^{2\theta i}(z_2-z_1)=z_2-z_1\Leftrightarrow\left|z_1z_2e^{2\theta i}\right|=1\Leftrightarrow\left|z_1z_2\right|=1.$$

这与已知条件 $|z_1z_2|<1$ 矛盾. 所以 $f(z)$ 在D 内单叶.

例 1.2.2. 设 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ 在 D 内解析，且 $\sum_{n=2}^{\infty}na_n \le |a_1|$, 则 $f(z)$ 在 D 内单叶.

证 对于 D 内的任何相异的两点 z_1, z_2, 由于 $\sum_{n=2}^{\infty}na_n \le |a_1|$, 因之

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| &= \left|a_1+a_2(z_1+z_2)+\cdots\right| \\
&\ge |a_1|-\left|a_2(z_1+z_2)+\cdots\right| \\
&\ge |a_1|-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\left(|z_1|^{n-1}+|z_1|^{n-1}|z_2|+\cdots+|z_2|^{n-1}\right) \\
&= |a_1|-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n| \ge 0
\end{aligned}
$$

即 $f(z_1)\ne f(z_2)$, 所以 $f(z)$ 在 D 内单叶. 证毕.

§ 1.3 单叶函数的面积原理、覆盖定理

1. 面积原理

面积定理是单叶函数论的一个基本定理，是由 T.H.Gronwall 于 1914 年首先给出的.

若 $f(z)\in S$，则 $f(D)$ 的面积为

$$A=\iint_D \left|f'(z)\right|^2 dxdy.$$

定理 1.3.1 （外面积原理） 设 $g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots\in\Sigma$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2 \le 1. \qquad (1.3.1)$$

证 设任意取 $r, r>1$，那么 $w=g(z)$ 将 $\{z:|z|=r\}$ 变成一条 Jordan 闭曲线 γ，且 γ 的内部的面积为正，用 A 表示 γ 的内部的面积，令 $w=g(z)=u+iv$，利用曲线积分面积公式，有

$$A=\int_0^{2\pi}u(\theta)v'(\theta)d\theta，\left(u(\theta)=\operatorname{Re}g\left(re^{i\theta}\right), v(\theta)=\operatorname{Im}g\left(re^{i\theta}\right)\right). \qquad (1.3.2)$$

将 $w=g(z)$ 的级数展开式代入（1.3.2）式，得到

$$A=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left\{re^{i\theta}+re^{-i\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}r^{-n}\left(b_ne^{-in\theta}+\bar{b}_ne^{in\theta}\right)\right\}\times$$

$$\left\{re^{i\theta}+re^{-i\theta}-\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}\left(nb_ne^{-in\theta}+n\bar{b}_ne^{in\theta}\right)\right\}d\theta. \tag{1.3.3}$$

利用公式

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}d\theta=\begin{cases}0,n\neq 0;\\2\pi,n=0.\end{cases}$$

由（1.3.3）式推出

$$A=\pi r^2-\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\left|b_n\right|^2r^{-2n}.$$

结合 $A>0$，从上式得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|b_n\right|^2r^{-2n}<r^2.$$

这样对于任意固定的自然数 N，都有

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}n\left|b_n\right|^2r^{-2n}<r^2. \tag{1.3.4}$$

（1.3.4）式两边，令 $r\to 1$ 时，得到

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}n\left|b_n\right|^2\leq 1.$$

对于上式，再令 $N\to\infty$ 时，即得（1.3.1）式. 证毕.

注 面积定理中主要证明了函数 $g(z)\in\Sigma$,将 Δ 映射为 w 平面内的区域,但不能盖满 w 平面,留下部分的面积大于或等于零,并说明了与 $g(z)$ 的幂级数之间的关系.

定理 1.3.2 （内面积原理） 设 $f(z)\in \mathrm{S}$，则 $f(\mathrm{D})$ 的面积为

$$\mathrm{A}=\pi\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n\right|^2\right). \tag{1.3.5}$$

证 设 $w=f(z)$ 的映射下,将圆盘 $D_r=\{z:|z|<r\}(0<r<1)$ 映射为区域 $f(D_r)$,

其面积记为A_r. 利用极坐标变换，令$z=\rho e^{i\theta}$，由面积公式

$$A_r=\iint\limits_{|z|\le r}|f'(z)|^2dxdy=\int_0^r\int_0^{2\pi}\left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^2\rho d\rho d\theta.$$

由于

$$|f'(z)|^2=f'(z)\overline{f'(z)}=\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}\right)\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}n\overline{a}_n\overline{z}^{n-1}\right);$$

$$\left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^2=\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n\rho^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\right)\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}n\overline{a}_n\rho^{n-1}e^{-i(n-1)\theta}\right).$$

当$0\le\rho<1$时，上式右端两个级数都绝对收敛，故其乘积仍绝对收敛，并且关于$\theta\in[0,2\pi]$一致收敛，因此可以交换次序、逐项积分. 为计算方便给出如下形式

$$\left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^2=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n\rho^{n-1}e^{i(n-1)\theta}+\sum_{n=2}^{\infty}n\overline{a}_n\rho^{n-1}e^{-i(n-1)\theta}+\sum_{n,m=2}^{\infty}nma_na_m\rho^{m+n-2}e^{i(n-m)\theta}$$

以下用定理 1.3.1 相同的方法，得到

$$\int_0^{2\pi}\left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^2d\theta=2\pi+2\pi\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_n\rho^{2n-2}.$$

因为$f'\left(\rho e^{i\theta}\right)=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n\rho^{n-1}e^{i(n-1)}$的收敛半径不小于 1，级数$\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_n\rho^{2n-2}$的收敛半径也不小于 1，对$[0,r]$中的$\rho$而言，一致收敛，故可以逐项积分，所以

$$A_r=\iint\limits_{|z|\le r}|f'(z)|^2dxdy=\int_0^r\int_0^{2\pi}\left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^2\rho d\rho d\theta$$

$$=2\pi\int_0^r\left(\rho+\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|^2\rho^{2n-1}\right)d\rho$$

$$=\pi\left(r^2+\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|^2r^{2n}\right).$$

以下用定理 1.14 相同的证法即得（1.3.5）式成立. 证毕.

2. 覆盖定理

*Bieberbach*于 **1916 年提出著名猜想：设 $f(z)\in S$，则 $|a_n|\le n$. 等号当且仅当 $f(z)=k(z)$ (Koebe 函数).**

Lowner ; Garabedian 与 Schiffer; Pederson 与 Ozawa; Pederson 与 Schiffer 等数学家，先后分别证明了 $|a_3|\le 3$（1923 年）；$|a_4|\le 4$（1955 年）；$|a_6|\le 6$（1968 年）；$|a_5|\le 5$（1972 年）. 最终数学家 Louisde Branges ，在 1984 年完全证明了 *Bieberbach* 猜想.

1916 年 *Bieberbach* 证明了：若 $g(z)\in\Sigma$，则 $|b_1|\le 1$, 由此推出

定理 1.3.3 （*Bieberbach* **定理**）设 $f(z)\in S$，则 $|a_2|\le 2$ 当且仅当

$$k(z)=\frac{z}{\left(1-e^{i\theta}z\right)^2}, \tag{1.3.6}$$

时等号成立. $k(z)$ 称为 Koebe 函数，它将 D 映射到除去一条射线 $w=re^{-i\theta},\frac{1}{4}\le r<+\infty$ 后的 w 平面.

证 下面分三步来证明.

（1）考虑函数

$$\varphi(z)=\frac{f(z^2)}{z^2}=1+a_2z^2+a_3z^4+\cdots+a_nz^{2n-2}+\cdots, \tag{1.3.7}$$

$\varphi(z)$ 在 D 内单值解析，且 $\varphi(0)=0$, 而 $f(z)$ 是单叶的，故当 $z\ne 0$ 时，$f(z^2)\ne 0$, $\varphi(z)=\frac{f(z^2)}{z^2}$，所以 $\psi(z)=\sqrt{\varphi(z)}=\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ 在 D 内有两个单值解析分支.今选，满足 $\varphi(0)=1$ 的一支，则 $\psi(z)$ 在 D 内单值解析，故有

$$\psi(z)=\left[1+\left(a_2z^2+a_3z^4+\cdots+a_nz^{2n-2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(a_2z^2+a_3z^4+\cdots\right)-\frac{1}{8}\left(a_2z^2+a_3z^4+\cdots\right)^2+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}a_2z^2+\left(\frac{1}{2}a_3-\frac{1}{8}a_2^2\right)z^4+\cdots$$

即$\psi(z)$是D内的偶函数，由解析性，上式在D内收敛.

（2）考虑奇函数

$$h(z)=z\psi(z)=z+\frac{1}{2}a_2z^3+\left(\frac{1}{2}a_3-\frac{1}{8}a_2^2\right)z^5+\cdots, \tag{1.3.8}$$

下面证明$h(z)$在D内单叶解析.

因为$\forall z_1,z_2\in D$，令 $h(z_1)=h(z_2)$.则$f\left(z_1^2\right)=h^2(z_1)=h^2(z_2)=f\left(z_2^2\right)$，根据$f(z)$在$D$内单叶性得到$z_1^2=z_2^2$. 若$z_1,z_2$中有一个为零，则$z_1=z_2$；若$z_1,z_2$均不为零，则有$z_1=z_2$或$z_1=-z_2$，利用$h(z)$为奇函数得到$h(z_1)=h(-z_2)=-h(z_2)$,再由$h(z_1)=h(z_2)$得到$h(z_1)=0$,而$h(z)$以$z=0$为唯一零点，于是$z_1=0$，这与假设矛盾，从而$z_1=z_2$. 即$h(z)$在$D$内单叶解析.

（3）考虑函数 $w=F(\zeta)=\dfrac{1}{h(1/\zeta)}$，这函数由三个变换$w=\dfrac{1}{\xi},\xi=h(z),z=\dfrac{1}{\zeta}$依次复合而成的. 上述每个变换都是单叶的，且当$|z|<1$时$|\zeta|>1$,所以$F(\zeta)$在$1<|\zeta|<\infty$内单叶，又显然$(\zeta)=\infty$是它的极点.

由 $h(z)=z+\frac{1}{2}a_2z^3+\cdots\cdots$,得到

$$F(\zeta)=\frac{1}{\frac{1}{\zeta}+\frac{a_2}{2\zeta^3}+\cdots}=\frac{\zeta}{1+\frac{a_2}{2\zeta^2}+\cdots}. \tag{1.3.9}$$

当$|\zeta|$充分大，使得$\left|\frac{a_2}{2\zeta^2}+\cdots\right|<1$时，有

$$F(\zeta)=\zeta\left(1-\frac{a_2}{2\zeta^2}+\cdots\right)=\zeta-\frac{a_2}{2}\cdot\frac{1}{\zeta}+\cdots, \tag{1.3.10}$$

从罗朗级数的唯一性知，（1.3.10）式在$|\zeta|>1$内也成立，于是由面积原理得到$|a_2/2|^2+\cdots\le 1$, 所以 $|a_2|\le 2$, 当$|a_2|=2$时，$a_2=2e^{i\varphi}$, 则$F(\zeta)$的罗朗级数里从ζ^{-2}的系数开始，所有各系数均为零.故 $F(\zeta)=\zeta-\zeta^{-1}e^{i\varphi}$. 因此

$$h(z)=h\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{1}{F(\zeta)}=\frac{1}{\zeta-e^{i\varphi}\zeta^{-1}}=\frac{z}{1-e^{i\varphi}z^2}$$

$$f(z^2)=\left[h(z)\right]^2=\frac{z^2}{\left(1-e^{i\varphi}z^2\right)^2}.$$

所以

$$f(z)=\frac{z}{\left(1-e^{i\varphi}z\right)^2}=z+2z^2e^{i\varphi}+3e^{i2\varphi}z^3+\cdots$$

反之，上面$f(z)$的展式中 $|a_2|=\left|2e^{i\varphi}\right|=2$. 证毕.

定理 1.3.4 （Koebe 定理） 设$f(z)\in S$，则$\left\{w:|w|<\frac{1}{4}\right\}\subset f(D)$.

证 设c不在$f(D)$之内，则$c\ne 0$，且函数

$$g(z)=\frac{cf(z)}{c-f(z)}=z+\left(a_2+\frac{1}{c}\right)z^2+\cdots\in S.$$

由定理 1.3.3 得到$|a_2|\le 2,\left|a_2+\frac{1}{c}\right|\le 2$，所以

$$\frac{1}{|c|}\le|a_2|+\left|a_2+\frac{1}{c}\right|\le 4,|c|\ge\frac{1}{4}.$$

即$f(z)$不取的值必在圆盘$|w|<\frac{1}{4}$的外部，$|w|<\frac{1}{4}$内的点均属于*koebe*函数表明常数$\frac{1}{4}$是精确的，不能再改进，这个定理又叫*koebe* $\frac{1}{4}$掩蔽定理. 证毕.

例 1.3.1 设$w=f(z)\in S, z\in D$, 定将D映射为$G, A, B,\notin G$, 且连接A与B的线段

$\overline{AB}$ 通过 $w=o$，则 A,B 中至少有一点与 $w=o$ 的距离不少于 $1/2$.

证 由 *koebe* 覆盖定理的证明

$$\xi=\varphi(z)=\frac{Af(z)}{A-f(z)}\in S$$

因 $B\notin G$. 故 $\varphi(z)$ 不取的值为 $AB/(A-B)$. 由 *koebe* 覆盖定理 $|AB/(A-B)|\geq 1/4$. 又因 $\overline{AB}$ 过原点，即 $argA-argB=\pi$，因此 $|1/A|+|1/B|\leq 4$，由此得到 $|A|\geq 1/2,|B|\geq 1/2$.

例 1.3.2 设函数 $w=f(z)\in S,z\in D$, 它将 D 映射为 G. 若 $w_0\notin G$, 则 $|f^{'}(0)|\leq 4|w_0|$.

证 因 $w=f(z)\in S,z\in D$, 由此得到 $f^{'}(0)\neq 0$. 于是 $\xi=F(z)=[f(z)/f^{'}(0)]\in S$, 而函数 $\xi=F(z)$ 是由两个映射 $\xi=w/f^{'}(0),w=f(z)$ 复合而成. 在映射 $w=f(z)$ 下 D 映射为 G，在映射 $\xi=w/f^{'}(0)$ 下 G 映射为 G_ξ，则 $(w_0/f^{'}(0))\notin G_\xi$, 由 *koebe* 覆盖定理可知，$(w_0/f^{'}(0))\geq 1/4.|f^{'}(0)|\leq 4|w_0|$.

例 1.3.3 设 $f(z)$ 是单位圆盘 D 内的解析函数，$f(0)=0$, 若 $\forall z\in D$, $\exists A>0$, 使得 $\operatorname{Re}f(z)\leq A$, 则对 $\forall r\in(0,1)$, 有

$$M(r)\leq\frac{2Ar}{1-r}, \tag{1.3.11}$$

其中 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}\{\operatorname{Re}f(z)\}$.

证 $\forall r\in(0,1)$, 令

$$A(r)=\max_{|z|=r}\{\operatorname{Re}f(z)\}.$$

因为

$$e^{A(r)}=\max_{|z|=r}\left\{\left|e^{f(z)}\right|\right\},A(0)=0,$$

$A(r)$为非负递增函数，并且由假设$A(r)\le A$. 令

$$g(z)=\frac{f(z)}{2A-f(z)}=\frac{P+iQ}{(2A-P)-iQ}. \tag{1.3.12}$$

其中 $P=\operatorname{Re}f,Q=\operatorname{Im}f$. 那么$g(z)$在$D$内的解析，且对$\forall z\in D$,有$|g(z)|^2\le 1$,从而$|g(z)|\le 1$, 由 Schwarz 引理可得$|g(z)|\le|z|$.从（1.3.12）即得（1.3.11）式. 证毕.

§1.4 偏差定理

我们需要如下引理

引理 1.4.1 若$w=f(z)\in S,z\in D$,则$|z|=r(0\le r<1)$时，有

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\le\frac{4r}{1-r^2}. \tag{1.4.1}$$

证 设任意一点$z=re^{i\theta}(0\le r<1)$,则线性映射

$$t=\frac{\xi-z}{\xi\overline{z}-1}. \tag{1.4.2}$$

将$|\xi|<1$映射为$|t|<1$, $\xi=z$变为原点.考虑函数 $w=\varphi(t)=f((t-z)/(t\overline{z}-1))$, $(|t|<1)$.它是由线性变换（1.4.2）与单叶函数$w=f(\xi)$复合而成的，因此$\varphi(t)$在$|t|<1$内单叶，于是可得

$$\varphi'(0)=-f'(z)\left(1-|z|^2\right),\varphi''(0)=f''(z)\left(1-|z|^2\right)^2-2\overline{z}f'\left(1-|z|^2\right).$$

再考虑函数

$$\psi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{\varphi'(0)},(|t|<1). \qquad (1.4.3)$$

显然$\psi(t)\in S$，其泰勒级数为

$$\psi(t)=\frac{1}{\varphi'(0)}\left[\varphi'(0)t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\cdots\right]=t-\frac{1}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-|z|^2\right)-2\overline{z}\right]t^2+\cdots. \qquad (1.4.4)$$

由定理 1.3.3 知

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-|z|^2\right)-2\overline{z}\right|\le 4. \qquad (1.4.5)$$

先用$1-z\overline{z}$除（1.4.5）式两端，再用$|z|=r<1$乘两端，即得（1.4.1）式. 证毕.

定理 1.4.1 若$w=f(z)\in S,z\in D,|z|=r(0\le r<1)$，则

（1）$\dfrac{1-r}{(1+r)^3}\le|f'(z)|\le\dfrac{1+r}{(1-r)^3}$,

（2）$\dfrac{r}{(1+r)^2}\le|f(z)|\le\dfrac{r}{(1-r)^2}$;

（3）$\dfrac{1-r}{1+r}\le\left|\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right|\le\dfrac{1+r}{1-r}$,

(4) $|\arg f'(z)|\le 2\log\dfrac{1+r}{1-r}$.

其中（1）（2）（3）称为偏差定理、（4）称为旋转定理. （1）（2）等式成立当且仅当$f(z)$是*koebe*函数的旋转.

证 先证明（1）(4). 设$w=f(z)\in S,z\in D,z=re^{i\theta},0\le r<1$. 由引理 1.4.1，得到

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\le\frac{4r}{1-r^2}.$$

由此得到

$$-\frac{4r}{1-r^2}\le \mathrm{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right]\le\frac{4r}{1-r^2}, \qquad (1.4.6)$$

$$-\frac{4r}{1-r^2}\le \mathrm{Im}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right]\le\frac{4r}{1-r^2}, \qquad (1.4.7)$$

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2}\le \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\le\frac{2r^2+4r}{1-r^2}, \qquad (1.4.8)$$

$$\frac{-4r}{1-r^2}\le \mathrm{Im}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\le\frac{4r}{1-r^2},$$

因为

$$\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}=r\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f'(z)\right|,\mathrm{Im}\frac{zf''(z)}{f'(z)}=r\frac{\partial}{\partial r}\arg f'(z),$$

从而

$$\frac{2r-4}{1-r^2}\le\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|\le\frac{2r+4}{1-r^2}, \qquad (1.4.9)$$

$$-\frac{4}{1-r^2}\le\frac{\partial}{\partial r}\arg f'\left(re^{i\theta}\right)\le\frac{4}{1-r^2}. \qquad (1.4.10)$$

分别（1.4.9），（1.4.10）式两端对 r 求积分就得到（1）和(4).

其次，证明（2）（3）.对任意的 $z=re^{i\theta},0\le r<1$，由（1）知

$$\left|f'(z)\right|\le\frac{1+r}{(1-r)^3} .$$

上式两端沿 0 至 z 的直线段积分，于是有

$$\left|f(z)\right|=\left|\int_0^z f'(t)dt\right|\le\int_0^{|z|}\left|f'(t)\right|\left|dt\right|\le\int_0^r\frac{1+r}{(1-r)^3}dr=\frac{r}{(1-r)^2}.$$

这就证明了 $|f(z)|$ 上界. 为了估计 $|f(z)|$ 得下界，我们考虑在映射 $w=f(z)$ 下，$|z|=r<1$ 的像曲线为 Γ，显然 Γ 为简单闭曲线且 $w=0$ 在其内部，由于 $|f(z)|$ 在 $|z|=r<1$ 上连续，故在 $|z_0|=1$ 使 $|f(z_0)|=\min\limits_{|z|=r}|f(z)|=|w_0|>0.$

设 L 是 $w=0$ 到 $w=w_0$ 直线段也表示其长度，它的原像为连接 0 和 z_0 的曲线 l.

于是对$|z|=r<1$上所有的点，均有

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| = \int_L |dw| = \int_l |f'(z)||dz| \geq \int_0^{|z|} \frac{1-t}{(1+t)^3} dt = \frac{r}{(1+r)^2}.$$

为了证明(3)，引进函数: 对于固定的$z_0 \in D$，定义

$$F(z) = \frac{f\left((z+z_0)/(1+\bar{z}_0 z)\right) - f(\bar{z}_0)}{\left(1-|z_0|^2\right) f'(z_0)}, (z \in D). \tag{1.4.11}$$

显然$F(z) \in S$. 当（1.4.11）式中取$z=-z_0$时，有

$$\left|\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right| = \frac{1}{1-|z_0|^2}\left|\frac{z_0}{F(-z_0)}\right|$$

利用（2）就得到(3). 证毕.

注 (4)式可以改进，Golusin 较复杂的方法得到

$$|\arg f'(z)| \leq \begin{cases} 4\arcsin|z|, |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi + \ln\frac{|z|^2}{1-|z|^2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| < 1. \end{cases}$$

§ 1.5 系数问题

单叶函数S, Σ中系数模的估计问题是很重要的课题.下面介绍两个特殊结果.

1. $|a_n|$的估计

我们需要如下引理.

引理 1.5.1 若$f(z) \in S$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \leq \frac{r}{1-r}, (0 \leq r < 1), \tag{1.5.1}$$

证 因为$f(z) \in S$，由定理 1.16 的证明过程得到

$$h(z)=z+\frac{1}{2}a_2z^3+\left(\frac{1}{2}a_3-\frac{1}{8}a_2^2\right)z^5+\cdots=z+b_3z^3+b_5z^5+\cdots,$$

且$h(z)\in S,\left[h(z)\right]^2=f\left(z^2\right)$.

在映射$w=h(z)$之下，圆盘$D_r=\{z:|z|\le r\}(0\le r<r)$的像区域为$h(D_r)$，其面积记为$S_r$，则有

$$S_r=\pi\left(r^2+3|b_3|r^6+5|b_5|r^{10}+\cdots\right). \tag{1.5.2}$$

令 $M(r)=\max\limits_{|z|\le r}|h(z)|$，于是$h(D_r)$全部在$|w|\le M(r)$中，故

$$S_r\le\pi\left(M(r)\right)^2. \tag{1.5.3}$$

利用定理 1.4.1 中的（2）式右端和最大模原理，可得

$$\left[M(r)\right]^2=\max_{|z|\le r}|h(z)|^2=\max_{|z|\le r}\left|f\left(z^2\right)\right|\le\max_{|z|\le r^2}|f(z)|\le\frac{r^2}{\left(1-r^2\right)^2}; \tag{1.5.4}$$

利用（1.5.2）（1.5.3）（1.5.4）式，得到

$$S_r=\pi\left(r^2+3|b_3|r^6+5|b_5|^2r^{10}+\cdots\right)\le\frac{\pi r^2}{\left(1-r^2\right)^2}$$

故

$$2r+6|b_3|r^5+10|b_5|^2r^9+\cdots\le\frac{2r}{\left(1-r^2\right)^2}.$$

上式两端从 0 到 r 积分，由于左端幂级数的收敛半径不小于 1. 故可逐次积分，得

$$r^2+3|b_3|r^6+5|b_5|^2r^{10}+\cdots\le\frac{r^2}{1-r^2}. \tag{1.5.5}$$

而

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h\left(re^{i\theta}\right)\overline{h\left(re^{i\theta}\right)}d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(re^{i\theta}+b_3r^3e^{i3\theta}+b_5r^5e^{i5\theta}+\cdots\right)\left(re^{-i\theta}+\overline{b}_3r^3e^{-i3\theta}+\overline{b}_5r^5e^{-i5\theta}+\cdots\right)d\theta$$
$$=r^2+|b_3|^2r^6+|b_5|^2r^{10}+\cdots.$$

由（1.5.5）式可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \le \frac{r^2}{1-r^2}, (0 \le r < 1). \tag{1.5.6}$$

由于$h(z)\in S, \left[h(z)\right]^2 = f\left(z^2\right)$及代换$2\theta=\varphi$，得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i2\varphi}\right)\right|d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left|f\left(r^2e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi.$$

又因为 $\left|f\left(r^2e^{i\varphi}\right)\right|$关于$\varphi$周期为$2\pi$的函数，所以

$$\int_{2\pi}^{4\pi}\left|f\left(r^2e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi = \int_0^{2\pi}\left|f\left(r^2e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi.$$

由此推出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(r^2e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi.$$

再利用（1.5.6）式，得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta \le \frac{r^2}{1-r^2}, (0 \le r < 1).$$

将上式中的r^2换以r，即得（1.5.1）式. 证毕.

定理 1.5.1 若 $f(z)\in S$，则 $|a_n| \le en\,(n=2,3,\cdots)$.

证 因$f(z)\in S$，由 Cauchy 公式

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz, (|z|=r<1).$$

和引理 1.5.1 ，得到

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta \le \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}.$$

容易验证函数 $r^{n-1}(1-r)$在$r=1-\dfrac{1}{n}$达到最大值，故

$$|a_n| \le n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \le en\,(n=2,3,\cdots).$$

证毕.

定理 1.5.2 若$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in S$，$a_n$为实数，则

$$|a_n| \le n\,(n=2,3,\cdots).$$

等号当且仅当 $f(z)=\dfrac{z}{(1\pm z)^2}$ 时成立.

证 令 $f(z)=u(z)+iv(z)$,因 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in S$,由 Cauchy 公式

$$a_nr^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(re^{i\theta}\right)e^{-ni\theta}d\theta,\left(0\le r<1,n\in N\right). \qquad (1.5.7)$$

又从 Cauchy 定理，得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(re^{i\theta}\right)e^{ni\theta}d\theta=0,\left(0\le r<1,n\in N\right). \qquad (1.5.8)$$

对（1.5.7）式取共轭后与（1.5.8）式相加，得到

$$a_nr^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u\left(re^{i\theta}\right)e^{-ni\theta}d\theta,\left(0\le r<1,n\in N\right).$$

类似地可得

$$a_nr^n=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}v\left(re^{i\theta}\right)e^{-ni\theta}d\theta,\left(0\le r<1,n\in N\right). \qquad (1.5.9)$$

（1.5.9）式两边取实部，有

$$a_nr^n=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}v\left(re^{i\theta}\right)\sin n\theta d\theta,\left(0\le r<1,n\in N\right).$$

由于 a_n 为实数，因此

$$f(\bar{z})=\overline{f(z)},v\left(re^{-i\theta}\right)=-v\left(re^{-i\theta}\right),u\left(re^{-i\theta}\right)=u\left(re^{i\theta}\right).$$

由此推出 $f(z)$ 仅在实轴上取实值，即只在 $\theta=0$ 与 $\theta=\pi$ 时才为零，否则与 $f(z)$ 的单叶性产生矛盾.

利用 $v\left(re^{-i\theta}\right)=-v\left(re^{-i\theta}\right)$ 得到

$$a_nr^n=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}v\left(re^{i\theta}\right)\sin n\theta d\theta,\left(0\le r<1,n\in N\right). \qquad (1.5.10)$$

此外利用恒等式

$$e^{in\theta}-e^{-in\theta}=\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\sum_{k=0}^{\infty}e^{(n-1-k)i\theta},$$

得到 $|\sin n\theta|\le n|\sin\theta|$. 从（1.5.10）得到

$$\left|a_n r^n\right| \le \frac{2n}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|v\left(re^{i\theta}\right)\right|\left|\sin\theta\right|d\theta.$$

又因为 $a_1 r=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}v\left(re^{i\theta}\right)\sin\theta d\theta$, 知当 $0<\theta<\pi$ 时，$v\left(re^{i\theta}\right)>0$, 故

$$\left|a_n r^n\right| \le \frac{2n}{\pi}\int_0^{2\pi}v\left(re^{i\theta}\right)\sin\theta d\theta = na_1 r = nr.$$

上式中令 $r\to 1$ 就得到 $\left|a_n\right|\le n\left(n=2,3,\cdots\right)$. 证毕.

2. Grunsky 不等式

为了得到 Grunsky 不等式，先给出 Faber 多项式和 Grunsky 系数.

定义 1.5.1 设 $g\left(z\right)\in\Sigma,\omega$ 是一个固定复数，当 ξ 充分大时，有

$$\frac{g'\left(\xi\right)}{g\left(\xi\right)-\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(\omega\right)\frac{1}{\xi^{n+1}}, F_0\left(\omega\right)=1. \qquad (1.5.11)$$

即

$$\frac{\xi g'\left(\xi\right)}{g\left(\xi\right)-\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\left(\omega\right)\frac{1}{\xi^n}.$$

其中的 $F_n\left(\omega\right)$ 称为 $g\left(z\right)$ 的 Faber 多项式.

显然将 $g\left(z\right)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots$ 代入上式，得到

$$\xi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb_n}{\xi^n}=\left[\xi+\left(b_0-\omega\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\xi^n}\right]\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n\left(\omega\right)}{\xi^n}\right].$$

比较两端系数得到

$$F_{n+1}\left(\omega\right)=\left(\omega-b_0\right)F_n\left(\omega\right)-\sum_{k=1}^{n-1}b_{n-k}F_k\left(\omega\right)-\left(n+1\right)b_n.$$

F_n 是首次项系数为 1 的多项式:

$$F_0\left(\omega\right)=1, F_1\left(\omega\right)=\omega-1, F_2\left(\omega\right)=\left(\omega-b_0\right)^2-2b_1,$$

$$F_3\left(\omega\right)=\left(\omega-b_0\right)^3-2b_1\left(\omega-b_0\right)-3b_2,\cdots,$$

$$F_n(\omega)=(\omega-b_0)^n-nb_1(\omega-b_0)^{n-2}+\cdots, \tag{1.5.12}$$

由于 $g(z)$ 在 $|z|>1$ 内单叶，所以函数

$$\frac{\xi g'(\xi)}{g(\xi)-g(z)}-\frac{\xi}{\xi-z}.$$

在 $|z|>1,|\xi|>1$ 是两个变量的解析函数，可以展为两个变量的幂级数

$$\frac{\xi g'(\xi)}{g(\xi)-g(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}n\gamma_{nm}\frac{1}{z^m\xi^n}. \tag{1.5.13}$$

定义 1.5.2 设 $g(z)\in\Sigma,\omega$ 是一个固定复数，则（1.5.13）式中的 γ_{nm} 称为 $g(z)$ 的 Grunsky 系数.

需要如下两个引理：

引理 1..5.2 设 $g(z)\in\Sigma,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是任意一组复数，$F_k(z)\,(k=1,2,\cdots,m)$ 是 Faber 多项式，$p_m(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}F_k(z)$,则

$$p_m(g(z))=\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}z^k+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k\gamma_{kn}}{z^n}. \tag{1.5.14}$$

证 在（1.5.11）中，令 $\omega=g(z)$，并与（1.5.1 3）式比较，得到

$$F_n(g(z))=z^n+n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma_{nm}}{z^m}. \tag{1.5.1 5}$$

用 ξ 除（1.5.1 3）式两边，再对 ξ 积分得到

$$\log\frac{g(\xi)-g(z)}{\xi-z}=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma_{nm}}{z^n\xi^m}. \tag{1.5.1 6}$$

容易得到 $\gamma_{nm}=\gamma_{mn.}$ 再利用已知条件从（1.5.1 6）式即得（1.5.1 4）式. 证毕.

引理 1.5.3 设 $g(z)\in\Sigma,\ p_m$ 是一个 m 次多项式，令

$$p_m(g(z))=\sum_{n=-m}^{\infty}\frac{c_n}{z^n},|z|>1.$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|c_n|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}n|c_{-n}|^2. \tag{1.5.17}$$

显然，$p_m(z)=z$ 时，就得到面积定理.

证 设 C_r 是 $|z|=r>1$ 在函数 $g(z)$ 映射下的像. D_r 是 C_r 的内部，若 $\varphi(\omega)$ 在 $\overline{D}_r$ 上有连续偏导数，由Green 公式

$$\frac{1}{2i}\int_{C_r}\varphi(\omega)d\omega=\iint_{D_r}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}dudv$$

令 $\varphi(\omega)=\overline{p_m}p_m'(\omega)$， 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\omega}}&=\frac{\partial}{\partial\overline{\omega}}\left(\overline{p_m(\omega)}\right)p_m'(\omega)+\overline{p_m(\omega)}\frac{\partial}{\partial\overline{\omega}}\left(p_m'(\omega)\right)\\&=\overline{p_m'(\omega)}p_m'(\omega)=\left|p_m'(\omega)\right|^2.\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}0&\le\iint_{D_r}\left|p_m'(\omega)\right|^2dudv=\frac{1}{2i}\int_{C_r}\overline{p_m'(\omega)}p_m'(\omega)d\omega\\&=\frac{1}{2i}\int_{|z|=r}\overline{p_m'(g(z))}p_m'(g(z))g'(z)dz\\&=\frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{m}\overline{C}_{-n}r^ne^{-ni\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{C}_nr^{-n}e^{ni\theta}\right)\times\\&\qquad\left(\sum_{n=1}^{m}n\overline{C}_{-n}r^ne^{ni\theta}-\sum_{n=1}^{\infty}nC_nr^{-n}e^{-ni\theta}\right)id\theta\end{aligned}$$

$$=\pi\left(\sum_{n=1}^{m}n|C_{-n}|^2r^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}n|C_{-n}|^2r^{-2n}\right). \tag{1.5.18}$$

（1.5.18）式两边，令 $r\to1$ 就得到（1.5.17）式. 证毕.

定理 1.5.3 （Grunsky 不等式）设 $g(z)\in\Sigma,\lambda_k(k\in N)$ 是复数，$\gamma_{nk}(k\in N)$ 为

$g(z)$ 的 Grunsky 系数. 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\sum_{n=1}^{m} \lambda_n \gamma_{nk}\right|^2 \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\left|\lambda_k\right|^2, \tag{1.5.19}$$

$$\sum_{k=1}^{m} k\left|\sum_{n=1}^{m} \lambda_n \gamma_{nk}\right|^2 \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\left|\lambda_k\right|^2 \tag{1.5.20}$$

若 $\mu_k\left(k=1,2,\cdots,m\right)$ 是有限复数时，有

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \gamma_{nk}\lambda_k\mu_n\right|^2 \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\left|\lambda_k\right|^2 \cdot \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\left|\mu_n\right|^2. \tag{1.5.21}$$

当 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left|\lambda_k\right|^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\mu_n\right|^2$ 都收敛时，有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk}\lambda_k\mu_n\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left|\lambda_k\right|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\mu_n\right|^2. \tag{1.5.22}$$

（1.5.19）—（1.5.22）式都称为 Grunsky 不等式.

证 利用引理 1.5.2 和引理 1.5.3 容易得到（1.5.19）式，在（1.5.19）式中特别取 $k=1,2,\cdots,m$ 时，就得到（1.5.20）式.利用引理 1.1.2 和已知条件，得到不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \gamma_{nk}\lambda_k\mu_n\right|^2 = \left|\sum_{n=1}^{m}\left(\sqrt{n}\sum_{k=1}^{m}\gamma_{nk}\lambda_k\right)\frac{\mu_n}{\sqrt{n}}\right|^2 \le \sum_{n=1}^{m} n\left|\sum_{k=1}^{m}\gamma_{nk}\lambda_k\right|^2 \cdot \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\left|\mu_n\right|^2.$$ 并

利用（1.5.20）式，就能得到（1.5.21）式成立. 若 $\{\lambda_k\},\{\mu_k\}\left(k\in N\right)$ 是两个无穷复数序列，且 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left|\lambda_k\right|^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\mu_n\right|^2$ 都收敛，因此（1.5.22）式成立. 证毕.

§ 1.6 Lindelöf 原理

1. 调和函数

我们本节及后面各章需要下列调和函数的一些基本性质：

定义 1.6.1 设$u(x,y)$是定义在区域E内的二元函数. 若$u(x,y)$在E存在连续的二阶偏导数且满足方程

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=0$$

则称$u(x,y)$为E内的调和函数.

定义 1.6.2 若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z=x+iy$是$E$内的单值解析函数，且$u(x,y), v(x,y)$为$E$内的调和函数,且满足$C-R$条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

则称$v(x,y)$是$u(x,y)$的共轭调和函数.

调和函数基本性质：

定理 1.6.1 区域E内的解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z=x+iy$的实部和虚部都是$E$内的调和函数，且$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$E$内解析的充要条件是$u(x,y)$和$v(x,y)$在$E$内为共轭调和函数.

利用解析函数的 Cauchy 公式可推出调和函数的平均值公式（中值定理）：

定理 1.6.2 如果函数$u(z)$在闭圆盘$D(z_0,\gamma)=\{z:|z-z_0|\le\gamma\}$上的调和函数，则

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(z_0+\gamma e^{i\varphi}\right)d\varphi$$

定理 1.6.3（Poisson 积分公式） 设$u(x,y)$是圆盘$D_\rho=\{z:|z|<\rho\}$ $(0\le\rho<1)$内的调和函数，$v(x,y)$为$u(x,y)$的共轭调和函数，$f(z)=u+iy$, 令

$0<R<\rho, z=re^{i\theta}\in D_R\subset D_\rho$，则有

$$u\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\theta}\right)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\theta,|z|<R. \tag{1.6.1}$$

其中 $\xi=\mathrm{Re}^{i\theta}$,函数

$$p(\xi,z)=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}. \tag{1.6.2}$$

称为 Poisson 积分（1.6.1）的核函数.

证 由 Cauchy 公式，得到

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,|z|<R. \tag{1.6.3}$$

又因为 $R^2/\bar{z}$ 在圆周 $|\xi|=R$ 的外部，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-R^2/\bar{z}}d\xi=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{\bar{z}f(\xi)}{R^2-\xi\bar{z}}d\xi=0. \tag{1.6.4}$$

（1.6.3）式与（1.6.4）式相减，并利用等式

$$\frac{1}{\xi-z}+\frac{\bar{z}}{\xi\bar{\xi}-\bar{z}\xi}=\frac{1}{\xi}\cdot\frac{|\xi|^2-|z|^2}{|\xi-z|^2}=\frac{1}{\xi}\mathrm{Re}\left(\frac{\xi+z}{\xi-z}\right).$$

得到

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)Re\left(\frac{\mathrm{Re}^{i\theta}+z}{\mathrm{Re}^{i\theta}-z}\right)d\theta.$$

上式两边取实部，得到

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)Re\left(\frac{\mathrm{Re}^{i\theta}+z}{\mathrm{Re}^{i\theta}-z}\right)d\theta,|z|<R. \tag{1.6.5}$$

（1.6.5）式中，令 $z=re^{i\varphi}$ 时，就得到（1.6.1）式

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\frac{\mathrm{R}^2-r^2}{\mathrm{R}^2+r^2-2\mathrm{R}\,r\cos(\theta-\varphi)},r<R.$$

证毕.

注 （1.6.1）式中$z=0$时就得到平均值公式

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\theta}\right)d\theta. \qquad (1.6.6)$$

（1.6.3）式相加从（1.6.4）式，并取共轭并利用$\overline{d\xi}=d\overline{\xi}=-\frac{R^2}{\xi^2}d\xi$得到的函数，即得 Schwarz 公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)Re\left(\frac{\mathrm{Re}^{i\theta}+z}{\mathrm{Re}^{i\theta}-z}\right)d\theta+iv(0),|z|<R. \qquad (1.6.7)$$

或

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{|\xi|=R}u\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\frac{d\xi}{\xi-z}-\overline{f(0)}. \qquad (1.6.8)$$

定理 1.6.4（极值原理） 设函数$u(z)$是区域E内的非常数调和函数，则$u(z)$在区域E内不能取到极大值和极小值.

证 利用反证法. 不妨假设$u(z)$在区域E内取到极大值. 即存在$z=z_0\in E$，在$z_0\in E$的邻域$|z-z_0|<\rho$内，有$u(z)\le u(z_0)$. 由平均值公式

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta, 0<r<\rho.$$

与$u\left(z_0+re^{i\theta}\right)$的连续性，推出在$|z-z_0|<\rho$内，$u(z)=u(z_0)$从而在$|z-z_0|<\rho$内$u(z)\equiv u(z_0)$. 即$E$内$u(z)\equiv u(z_0)$成立，这与已知条件矛盾.同理可证$u(z)$在区域$E$内不能取到极小值. 证毕.

推论 1.6.1 若函数$u(z)$在有界区域E内调和，区域$\overline{E}=E\cup\partial E$上连续，则$u(z)$在$\partial E$上取到最大值和最小值.

关于调和函数列有性质（证明详见[7]）:

定理 1.6.5 设$\{u_n(z)\}(n\in N)$为区域E内的调和函数列，.

（1）若$\{u_n(z)\}(n\in N)$在区域E内内闭一致收敛，则极限函数$u(z)$在E内也是调和；

（2）若$\{u_n(z)\}(n\in N)$在区域E内内闭一致有界，则存在$\{u_n(z)\}(n\in N)$的子序

列在 E 内内闭一致收敛.

2. 次调和函数

定义 1.6.3 设 $u(z)$ 为区域 E 内的连续实函数，若对于 E 内的任意点 a 及适当小的 $r>0$ 满足条件

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta$$

则称 $u(z)$ 为区域 E 内的次调和函数.

由定义 1.6.3 容易得到:

定理 1.6.6 连续函数 $u(z)$ 为区域 E 内的次调和函数的充要条件是，对于每一个 $z_0 \in E$ 存在 $\gamma_0>0$, 使得 $D(z_0,\gamma_0)=\{z:|z-z_0|\le \gamma_0\}\subset E$ 时，有

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0+\gamma_0 e^{i\varphi}\right)d\varphi(\gamma_0<\gamma).$$

证 先证必要性. 设 $D(z_0,\gamma)=\{z:|z-z_0|\le \gamma\}\subset E$; $g(z)$ 为 $D(z_0,\gamma)$ 内的调和函数，且满足 $g(z)=u(z)(|z-z_0|=\gamma)$，则有

$$g(z_0)\le u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0+\gamma e^{i\varphi}\right)d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(z_0+\gamma e^{i\varphi}\right)d\varphi.$$

其次，证充分性. 假设存在 $E_1\subset E$, 使得 $\overline{E}_1\subset E$, 且有调和函数 $u(z)\le g(z)(z\in\partial E_1)$. 若 E_1 内存在某些点处有满足 $u(z)>g(z)$, 又设 $F(z)=u(z)-g(z)$, 且 $\exists E_0\subset E$，$F(z)$ 在 E_0 内达到最大值 $M>0$.又因 $z\in\partial\overline{E}_1$ 时，$F(z)\le 0$, 所以 $E_0\subset E_1$. 由于 E_0 是闭集，则对于点 $z_0\in E_0$ 没有圆形邻域整个包含在 E_0 内. 因此 $\exists\{\gamma_n\},\gamma_n\to 0$, 使得圆盘 $D(z_0,\gamma_n)\subset E_1$，而圆周 $|z-z_0|=\gamma_n$ 不能完全含在 E_0 内，在该圆周的某一段弧上有 $F(z)<M$. 从而有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0+\gamma_n e^{i\theta}\right)d\theta-g(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(z_0+\gamma_n e^{i\theta}\right)d\theta<$$

$$M = F(z_0) = u(z_0) - g(z_0).$$

这与已知条件矛盾. 证毕.

注 由定理 1.6.6 还可得到，若 $f(z)=u(z)+iv(z), \tau>0,$ 在区域 E 内解析，则 $|f(z)|^{\tau}, |u(z)|^{\tau}$ 是 E 内的次调和函数.

定理 1.6.7 若 $u(z)$ 为区域 E 内非常数的次调和函数，则 $u(z)$ 在 E 内不能达到最大值.

证 设 $u(z)$ 为区域 E 内的次调和函数，令 $M=\sup\limits_{z\in E} u(z)$，$E_1$ 为满足条件 $u(z)=M$ 的 E 内点集. 若 $E=E_1$，则 $u(z)=M$，这与假设矛盾，所以 $E_1 \subset E$. 下面要证明 $E_1=\phi$.

由 $u(z)$ 的连续性，E_1 是闭集. 又因 E_1 为 E 的真子集，所以存在边界点 $z_1 \in E$，使得 E 内存在边界点 $z_1 \in E_1$ 为中心的圆周 $C_{r_1}: |z-z_1| = r_1$，从而存在 $z_2 \in C_{r_1}, z_2 \notin E$. 由连续性，对于 $\forall \varepsilon>0,$ 存在包含 z_2 的弧 γ_1, 在 γ_1 上，有 $u(z)<M-\varepsilon.$ 在 C_{r_1} 的其余部分 γ_2 上 $u(z)=M$. 令 用 ℓ_1, ℓ_2 分别表示 γ_1, γ_1 的弧长，于是

$$\begin{aligned} M = u(z_1) &\le \frac{1}{2\pi}\int_{C_{r_1}} u(z_1+re^{i\varphi})d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{C_{r_1}} u(z_1+re^{i\varphi})d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{C_{r_2}} u(z_1+re^{i\varphi})d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi r}\{(M-\varepsilon)\ell_1 + M\ell_2\} = M - \frac{\varepsilon \ell_1}{2\pi r} < M. \end{aligned}$$

这就产生矛盾，故 $E_1=\phi$. 证毕.

注 次调和函数在 E 内可以取到最小值.

用定理 1.6.7 类似地证明:

定理 1.6.8 若 $u(z)$ 为区域 E 内的次调和函数，对于 $\forall \tau \in \partial E,$ 有

$$\overline{\lim_{z\to\tau}} u(z) \le M,$$

则在 E 内 $u(z)\le M$，若在 E 内有一点使等式成立，则 $u(z)=M$.

用定理 1.6.8 容易证明：

定理 1.6.9 若 $u(z)$ 为区域 E 内的次调和函数，$v(z)$ 为区域 E 内的调和函数；且对于 $\forall\tau\in\partial E$，有 $\overline{\lim_{z\to\tau}}\left(u(z)-v(z)\right)\le 0$，则在 E 内 $u(z)\le v(z)$；若在 E 内有一点使等式成立，则 $u(z)\equiv v(z)$. $v(z)$ 称为 $u(z)$ 的调和控制函数.

3. Lindelöf 原理

定义 1.6.4 （Green 函数） E 是一个区域，$a\in E$，a 为 $g(z,a)$ 的奇点，若满足条件

（1） $g(z,a)$ 在 E 内除 a 点外调和的；

（2）若 $a\neq\infty$，$g(z,a)=-\log|z-a|+G(z)$，$G(z)$ 在 a 点的领域内调和，若 $a=\infty$，$g(z,a)=\log|z|+G(z)$，$G(z)$ 在 ∞ 点的领域内调和；

（3）对于 ∂E 上的任意一点 ξ，$\lim_{z\to\xi} g(z,a)=0$.

则称函数 $g(z,a)$ 是关于奇点 a 的 Green 函数.

Green 函数有如下基本性质：

I. 若 $g(z,a)$ 为关于奇点 $a\in E$ 的 Green 函数，则 $g(z,a)$ 是唯一的.

II. 对于单连通区域 E，有 $g(z,z_0)=-\log|f(z,z_0)|$，这里 $f(z,z_0)$ 是 E 到单位圆盘 D 的 Riemann 映射，且 $f(z_0,z_0)=0$.

定理 1.6.10（Lindelöf 原理） 设 E，Ω 分别是 z 平面和 w 平面上的两个区域，其中的任意奇点都有 Green 函数 $g(z,z_0)$ 和 $G(w,w_0)$. 若 $w=f(z)$ 在 E 内解析，

且 $f(E)\subset\Omega$, 则

$$g(z,z_0)\le G(f(z),f(z_0)). \tag{1.6.9}$$

如果存在一对点 z,z_0 使得（1.6.9）式的等号成立，则（1.6.9）式对于 E 内的一切点对 z,z_0，（1.6.9）式成为等式.

证 若 $f(z)=f(z_0)$ 时（1.6.9）式，显然成立.这时右边恒为 ∞.现在考虑函数

$$w(z)=g(z,z_0)-G(f(z),f(z_0)).$$

用 a 表示除去 z_0 和 $f(z)-f(z_0)$ 的一切零点 z_1 外 $w(z)$ 的调和的点，在 a 的邻域内有

$$f(z)-f(a)=(z-a)^m\{A+B(z-a)+\cdots\},m>0,A\ne 0,$$
$$\log|f(z)-f(a)|=m\log|z-a|+\log|f_1(z)|,f_1(a)\ne 0.$$

因此 $w(z)$ 在 $z=a$ 只能有对数奇点

$w(z)=g(z,z_0)=m\log|z-a|+\psi(z)$, $\psi(z)$ 为调和函数, $w(z)$ 为 E 内的次调和函数

$$\lim_{z\to a}w(z)=-\infty.$$

当 $z\to\forall\xi\in\partial E$ 时，$g(z,z_0)\to 0$, 此时 $G(f(z),f(z_0))\ge 0$, 所以 $\forall\xi\in\partial E, w(\xi)\le 0$. 由次调和函数的极值原理（定理 1.6.7）可知，$\forall z\in E, w(\hat{z})\le 0$, 且若 $\exists z\in E$, 使得 $w(z)=0$, 则 $w(z)\equiv 0$, 即 $g(z,z_0)=G(f(z),f(z_0))$. 证毕.

若 E，Ω 都是单位圆盘时，有

$$g(z,z_0)=-\log\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0z}\right|,G(w,w_0)=-\log\left|\frac{w-w_0}{1-\overline{w}_0w}\right|.$$

由定理 1.6.10，得到如下结果：

定理 1.6.11 若 $w=f(z)$ 在单位圆盘 D 内解析，$|f(z)|<1$, 则 $\forall z,z_0\in D$, 有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right| \le \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right|. \tag{1.6.10}$$

当（1.6.10）式两边 $z \to z_0\left(\forall z_0 \in E\right)$ 时，得到

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right| \le \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right|\left|f'(z_0)\right| \le \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right|. \tag{1.6.11}$$

注 当 $z_0 = 0$ 时，$f(0)=0$, 则由（1.6.10）得到 $\left|f(z)\right| \le |z|$, 此时从（1.6.11）推出 $\left|f'(0)\right| \le 1$. 所以定理 1.6.11 为推广的 Schwarz 引理.

4. 最大模增长方向

Hayman 首先引进了函数的最大模增长方向的定义：

定义 1.6.5 设 $M_\infty(r,f)=\max\limits_{|z|=r}\left|f(z)\right|$, 若 $\forall f(z) \in S$, 有

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^2 M_\infty(r,f)=\alpha, 0 \le \alpha < 1.$$

则称 α 为 Hayman 指数.

定义 1.6.6 设 $f(z) \in S$, $\exists \varphi_0, M_\infty(r,f)=\max\limits_{r\to 1}(1-r)^2\left|f(z)\right|=\alpha_f \ne 0$, 则称 φ_0 为 $f(z)$ 的最大模增长方向，α_f 为 Hayman 指数.

定义 1.6.7 设 $f(z) \in S$, 且满足条件 $\max\limits_{r\to 1}(1-r)^2 M(r,f)=\alpha_f \ge \alpha > 0$, 则称 $f(z) \in S(\alpha)$.

为了证明 S 中函数的 Hayman 指数性质，需要如下引理：

引理 1.6.1 若 $f(z) \in S, 0 < r_1 < r_2 < 1$，则

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}\left|f\left(r_2 e^{i\theta}\right)\right| \le \frac{(1-r_1)^2}{r_1}\left|f\left(r_1 e^{i\theta}\right)\right|, \tag{1.6.12}$$

证 设 $f(z) \in S$, $\forall z = re^{i\theta} \in D$，由定理 1.18 可知

$$\frac{1-r}{1+r}\leq\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leq\frac{1+r}{1-r}$$

由此推出

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq\left|\frac{f'\left(re^{i\theta}\right)}{f\left(re^{i\theta}\right)}\right|\leq\frac{1+r}{r(1-r)}.$$

上式两边从 r_1 到 r_2 积分，得到

$$\log\left|\frac{f\left(r_2e^{i\theta}\right)}{f\left(r_1e^{i\theta}\right)}\right|\leq\int_{r_1}^{r_2}\frac{1+r}{r(1-r)}dr=\log\frac{r_2(1-r_1)^2}{r_1(1-r_2)}.$$

由此即得（1.6.12）式. 证毕.

定理 1.6.12 设 α 为 Hayman 指数，则对 $\forall f(z)\in S,\exists\alpha,0\leq\alpha<1,$ 使得

$$\lim_{r\to1}(1-r)^2M(r,f)=\alpha. \tag{1.6.13}$$

当 $f(z)=\left(z-z^2\cos\varphi\right)\left(1-e^{i\varphi}\right)^{-2}(\cos\varphi\neq0)$ 时等号成立.

证 设 $f(z)\in S,$ 由引理 1.6.1 知，当 $0<r_1<r_2<1$ 时，有

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}M(r_2,f)\leq\frac{(1-r_1)^2}{r_1}M(r_1,f),$$

即 $\frac{(1-r)^2}{r}M(r,f)$ 为 r 的单调减少有界函数，因而（1.6.13）式成立. 证毕.

定理 1.6.13 设 α 为 Hayman 指数，$f(z)\in S,\lim\limits_{r\to1}(1-r)^2M(r,f)=\alpha\neq0$，则存在唯一方向 φ_0，使得

$$\lim_{r\to1}(1-r)^2\left|f\left(re^{i\varphi_0}\right)\right|=\alpha. \tag{1.6.14}$$

证 先证明（1.6.14）式. 令 $\{r_n\}(n\in N)$ 为实数列，且 $\lim\limits_{r\to\infty}r_n=1$. 取 $\varphi_n\in[0,2\pi]$，使 $\left|f\left(r_ne^{i\varphi_n}\right)\right|=M(r_n,f),$ 则当 $0<r<r_n<1$ 时，有

$$\alpha \le \frac{(1-r_n)^2}{r_n}\left|f\left(r_n e^{i\varphi_n}\right)\right| \le \frac{(1-r_n)^2}{r}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|. \tag{1.6.15}$$

设 φ_0 为 φ_n 的聚点，并（1.6.15）式两边取极限 $n\to\infty$ 时，有

$$\alpha \le \frac{(1-r)^2}{r}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| \le \frac{(1-r)^2}{r}M(r,f).$$

又因为

$$\lim_{r\to 1}\frac{(1-r)^2}{r}M(r,f)=\alpha$$

从以上两式推出（1.6.14）式成立.

其次，证明 φ_0 的唯一性. 由 Goluzin 弦与弧的偏差定理，我们有

$$\frac{(1-r)^2}{r}\left|e^{i\varphi}-e^{i\varphi_0}\right| \le \left|\frac{1}{f\left(re^{i\varphi}\right)}-\frac{1}{f\left(re^{i\varphi_0}\right)}\right| \le \frac{1}{\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|}+\frac{1}{\left|f\left(re^{i\varphi_0}\right)\right|}, \tag{1.6.16}$$

若 $\varphi\ne\varphi_0,\varphi\in[0,2\pi],\lim\limits_{r\to 1}(1-r)^2\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|=\alpha\ne 0$. 在（1.6.16）式两边除以 $(1-r)^2$，再令 $r\to 1$，则（1.6.16）式右边为常数，左边趋于 ∞. 这是矛盾的结论. 于是 φ_0 唯一的. 证毕.

第二章　从属原理及特殊解析函数类

从属原理是几何函数论中重要的研究工具之一，应用从属原理来研究解析单叶函数的各种几何性质，而且通过它把两个解析函数有机地联系在一起.

本章中我们主要介绍由从属关系定义的特殊函解析数类的基本结果. 这些函数类与正实部函数有着密切关系，除了本身的研究价值外，都可用一些不等式来刻画自身.

§2.1　从属原理 正实部函数

1. 从属原理的概念

定义 2.1.1 设$f(z)\in A, g(z)\in A$，如果存在 D 内解析函数$\varphi(z)$（不必单叶），满足$\varphi(0)=0, |\varphi(z)|<1$，使得

$$f(z)=g(\varphi(z))(z\in D) \tag{2.1.1}$$

则称$f(z)$从属于$g(z)$，记为$f(z)\prec g(z)$.

下面证明从属关系的一些基本性质：

定理 2.1.1 若$f(z)\prec g(z)$，$z\in D$，则

$$f(D)\subset g(D), f(0)=g(0) \tag{2.1.2}$$

$$f(|z|<r)\subset g(|z|<r)(0<r<1) \tag{2.1.3}$$

$$\max_{|z|\le r}|f(z)|\le \max_{|z|\le r}|g(z)|(0\le r<1) \tag{2.1.4}$$

$$\max_{|z|\le r}(1-|z|^2)|f'(z)|\le \max(1-|z|^2)|g'(z)|(0\le r<1) \tag{2.1.5}$$

$$|f'(0)|\le|g'(0)| \tag{2.1.6}$$

证　设$f(z)\prec g(z)$，因$\varphi(D)\subset D, \varphi(0)=0$，由从属关系定义推出（2.1.2）式成立.利用（2.1.2）式和 Schwarz 引理 1.1.2 有$|\varphi(z)|\le|z|$，因而（2.1.3）式得证；由（2.1.3）式直接可推出（2.1.4）式.

根据定理 1.6.11 中的（1.6.11）式，得到

$$(1-|z|^2)|\varphi'(z)|\le 1-|\varphi(z)|^2$$

从而，结合从属定义 $f(z)=g(\varphi(z))$，我们有

$$(1-|z|^2)|f'(z)|=(1-|z|^2)|\varphi'(z)||g'(\varphi)|\le(1-|\varphi|^2)|g'(\varphi)|,$$

再利用 $|\varphi(z)|\le|z|$ 便得（2.1.5）式，在（2.1.5）式中，令 $z=0$ 时就能推出（2.1.6）式. 证毕.

定理 2.1.2 若 $g(z)$ 在 D 内单叶，则 $f(z)\prec g(z)$ 当且仅当 $f(0)=g(0)$, $f(D)\subset g(D)$

. **证** 先证必要性. 因为 $g(z)$ 在 D 内单叶，故反函数 $g^{-1}(w)$ 在 $g(D)$ 内解析. 如果 $f(D)\subset g(D)$，则 $\varphi(z)=g^{-1}(f(z))$ 在 D 内解析，$|\varphi(z)|<1$，并且满足等式（2.1.1）式. 而 $f(0)=g(0)$ 意味着 $\varphi(0)=0$. 即存在 $\varphi(z)$ 有 $f(z)=g(\varphi(z))$.

其充分性，我们在定理 2.1.1 中已证明. 证毕.

定理 2.1.3（从属原理） 若 $g(z)$ 在 D 内单叶，则 $f(0)=g(0)$，$f(D)\subset g(D)$ 蕴涵 $f(D_r)\subset g(D_r)$，其中 $D_r=\{z:|z|<r\},0<r<1$.

Robertson 在 1970 年引进关于从属关系的一个稍弱的提法：

定义 2.1.2 设 $f(z)\in A, g(z)\in A$，若存在 $\varphi(z), z\in D$，使得

$$|f(z)|\le|g(\varphi(z))|,\quad |\varphi(z)|\le|z|,$$

则称 $f(z)$ 在 D 中拟从属于 $g(z)$. 显然从属关系是拟从属关系的特殊情形.

若在 D 中 $f(z)$ 拟从属于 $g(z)$,也可以写成如下形式

$$f(z)=w(z)g(\varphi(z)),(z\in D),$$

其中 $w(z)$ 与 $\varphi(z)$ 在 D 中解析且满足 $|w(z)|\le 1,|\varphi(z)|\le|z|$.

定理 2.1.4 设 $\lambda\in(0,+\infty)$，如果 $f(z)$ 拟从属于 $g(z)$，则

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^{\lambda}d\theta\le\int_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^{\lambda}d\theta,(r\in[0,1))$$

证 从拟从属关系的定义可知 $|f(z)|\le|g(\varphi(z))|$，$|\varphi(z)|\le|z|$，且 $|g(z)|^{\lambda}$ 是次调和函数，当 $\rho\in(0,r)$ 时，有

$$\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda}d\theta\le\int_0^{2\pi}|g(\varphi(\rho e^{i\theta}))|^{\lambda}d\theta$$

$$\le\int_0^{2\pi}|g(re^{it})|^{\lambda}\mathrm{Re}[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+\varphi(\rho e^{i\theta})}{re^{it}-\varphi(\rho e^{i\theta})}d\theta]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}|g(re^{it})|^{\lambda}dt$$

令 $\rho\to r$ 时即得定理的结论. 证毕.

推论 2.1.1 设 $\lambda\in(0,+\infty), r\in[0,1)$，若 $f(z)\prec g(z), z\in D$，则

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^{\lambda}d\theta\le\int_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^{\lambda}d\theta. \tag{2.1.7}$$

2. 正实部函数

定义 2.1.3 设函数 $p(z)$ 在 D 内解析且满足 $p(0)=1, \mathrm{Re}\,p(z)>0$，则称 $p(z)$ 为正实部函数，其全体记为 P.

下面讨论正实部函数类 P 的性质.

定理 2.1.5 设 $p(z)=1+p_1z+\cdots\in P$，则下面两个条件等价:

（1）存在增函数 $\gamma(t)(0\le t\le 2\pi)$，使得

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\gamma(t), \gamma(2\pi)-\gamma(0)=1. \tag{2.1.8}$$

（2）对于 $m=1,2,\cdots$，有

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}p_{k-l}\lambda_k\overline{\lambda_l}\ge 0 \tag{2.1.9}$$

其中 $\lambda_i(i=0,1,2,\cdots,m)$ 是任意复数，且约定 $p_0=2, \overline{p_k}=p_{-k}(k\ge 1)$.

证（1）因 $p(z)\in P$，由 Schwarz 公式（1.6.7），对于 $z\in D$

$$p(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\mathrm{Re}\,p(re^{it})dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}d\gamma(t,r). \tag{2.1.10}$$

其中$\gamma(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}p(re^{it})dt;(t\in[0,2\pi])$为$t$的增函数且有界$(0\le\gamma(t,r)\le 1)$.

于是可以得到数列$r_n(0<r_n<1), r_n\to 1(n\to\infty)$，使得$\gamma(t,r_n)$收敛于$\gamma(t)$，再由控制收敛定理，得

$$p(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r_ne^{it}+z}{r_ne^{it}-z}d\gamma(t,r_n)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\gamma(t)$$

（2）若$p(z)\in P$，由（1）知道

$$p_k=2\int_0^{2\pi}e^{-ikt}d\gamma(t)(k=1,2,\cdots) \qquad (2.1.11)$$

根据约定，当$k\le 0$时上式也成立. 因此

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e^{-ikt}\right|^2 d\gamma(t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m}\lambda_k\overline{\lambda_l}\int_0^{2\pi}e^{-i(k-l)t}d\gamma(t)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}p_{k-l}\lambda_k\overline{\lambda_l}$$

而$d\gamma(t)\ge 0$，从而$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}p_{k-l}\lambda_k\overline{\lambda_l}\ge 0$.

下面要证明 若(2)成立，则$p(z)\in P$. 取$\lambda_k=z^k(k=0,1,2,\cdots,m)$，令$m\to\infty$就得到

$$0\le\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}p_{k-l}z_k\overline{z}_l=2\sum_{k=0}^{\infty}|z|^k+2\operatorname{Re}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{m}p_{k-l}z^{k-l}|z|^{2l}$$

$$=2(1-|z|^2)^{-1}\operatorname{Re}p(z)$$

由此推出$p(z)\in P$. 证毕.

推论 2.1.2 若$p(z)\in P$，则$|p_n|\le 2$. 当$p(z)=\frac{1+e^{it}z}{1-e^{it}z}(t\in[0,2\pi])$时等号成立.

证 设 $p(z)\in P$，由（2.1.11）式得到

$$|p_n|=2\left|\int_0^{2\pi}e^{int}d\gamma(t)\right|\le 2\int_0^{2\pi}d\gamma(t)=2.$$

由此即得结论成立. 证毕.

定理 2.1.6 若 $p(z)\in P$，则对任意复数 λ，恒有

$$|p_2-\lambda p_1^2|\le 2\max(1,|1+2\lambda|).$$

当 $|1+2\lambda|\ge 1$ 时，使等号成立的函数为 $p(z)=\frac{1+z}{1-z}$；当 $|1+2\lambda|<1$ 时，$p(z)=\frac{1+z}{1-z}$ 达等号.

证 因 $p(z)\in P$，所以存在解析函数 $\varphi(z),|\varphi|<1,\varphi(0)=0$，使得

$$p(z)=\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}=1+p_1z+p_2z^2+\cdots\ , \tag{2.1.12}$$

令 $\varphi(z)=1+c_1z+c_2z^2+\cdots$，比较系数可得

$$p_1=2c_1,\ p_2=2(c_2-c_1^2).$$

于是对任意的 λ，有

$$\begin{aligned}|p_2-\lambda p_1^2|&=2|c_2-(1+2\lambda)c_1^2|\\&\le 2(|c_2|+|1+2\lambda||c_1|^2)\\&\le 2[1-(1-|1+2\lambda|)|c_1|^2]\\&=2[1+(|1+2\lambda|-1)|c_1|^2]\\&\le 2\max(1,|1+2\lambda|)\end{aligned}$$

证毕.

若 $p(z)\in P$，可等价地写成 $p(z)\prec\frac{1+z}{1-z}$. 从而存在解析函数 $\varphi(z),|\varphi|<1$，使 $p(z)=\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$ 或 $\varphi(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}$.

利用从属原理推出

定理 2.1.7 若 $p(z)\in P$，则

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\le|p(z)|\le\frac{1+|z|}{1-|z|};$$

$$|p'(z)|\le\frac{2}{(1-|z|)^2};$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \operatorname{Re} p(z) \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

估计是准确的.

我们还可以引进并讨论正实部函数的特殊子类性质:

设 $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ 在 D 内解析, A,B 是满足条件 $-1\le B<A\le 1$ 的实数, 若 $p(z)$ 在 D 内满足从属关系 $p(z)\prec \frac{1+Az}{1+Bz}$, 则称函数 $p(z)\in P(A,B)$. 显然 $P(A,B)\subset p(1,-1)=P$, 且 $p(1-2\beta,-1)=\{p(z):\operatorname{Re} p(z)>\beta\}$, $\beta\in[0,1)$. 从略.

§2.2 星象函数 凸象函数

定义 2.2.1 设函数 $f(z)\in S, z\in D$, 若其区域 $f(D)$ 关于原点星象. 即 $\forall w\in f(D)$, 有 $tw\in f(D), t\in(0,1)$, 则称 $f(z)$ 为关于原点成星象函数, 其全体记为 S^*.

定义 2.2.2 设函数 $f(z)\in S, z\in D$, 若 $f(D)$ 为凸区域. 即 $\forall w_1,w_2\in f(D)$, 有 $tw_1+(1-t)w_2\in f(D)$, 则称 $f(z)$ 为凸象函数, 其全体记为 K.

注 由 S^* 和 K 的定义可知: 若 $f(z)\in S^*$, 则 $f(z)\in K$; 但反之不成立.

设 $f(z)\in S$, 在映射 $f(z)$ 之下, 分别记 D 与 $D_r=\{z:|z|<r\}(0<r<1)$ 的像区域为 $f(D)$ 与 $f(D_r)$, 于是有如下定理:

定理 2.2.1 设 $w=f(z)\in S$, 则

(1) $f(z)\in S^* \Leftrightarrow$ 对任意的 $r\in(0,1)$, $f(D_r)$ 为星象区域;

(2) $f(z)\in K \Leftrightarrow$ 对任意的 $r\in(0,1)$, $f(D_r)$ 为凸区域.

证 (1) 若 $f(z)\in S^*$, 则 $f(D)$ 为星象区域. 要证明 $f(D_r)$ 为星象区域, 只要证明对 $f(D_r)$ 内任意一点 w_1', 线段 $\overline{ow_1'}\subset f(D_r)$ 即可.

设 $w\in f(D)$，因 $f(D)$ 为星象区域，故 $\overline{ow}\subset f(D)$，于是当 $0\le t<1$ 时，$\forall tw\in\overline{ow}\subset f(D)$，即点 tw 在 $f(D)$ 内，于是函数 $f^{-1}[tf(t)]=\psi(z)$ 在 D 内解析，且 $\psi(0)=f^{-1}[tf(0)]=0, |\psi(t)|<1$，由 Schwarz 引理 1.1.2 得到，在 D 内 $|\psi(z)|<|z|$.

设 w_1 是 $f(D_r)$ 内任意一点，$w_1=f(z_1), |z|<r$，则有 $|\psi(z_1)|<|z_1|$，即 $|f^{-1}(tw_1)|<r$. 下面要证明 $tw_1\in f(D_r)$.

因为 $w_1\in f(D_r)\subset f(D)$，故 $tw_1\in f(D)$. 于是有 $tw_1=f(z_2)(|z_2|<1)$. 从而 $|z_2|=|f^{-1}(tw_1)|<r$，所以 $tw_1=f(z_2)\in f(D_r)(0\le t<1)$. 即 $\overline{ow_1}$ 上所有的点均在 $f(D_r)$ 内，亦即 $\overline{ow_1}\subset f(D_r)$. 所以 $f(D_r)$ 是星象区域.

反之，设 $f(z)\in S$，对 $\forall r\in(0,1)$，$f(D_r)$ 是星象区域，下面要证 $f(z)\in S^*$，即只要证明 $f(D)$ 是星象区域即可.

设 $\forall w_1\in f(D)$，在 $w_1=f(z_1), |z_1|=r_1<1$，选 r_2 使 $r_1<r_2<1$，于是 $w_1\in f(D_{r_2})$，而 $f(D_{r_2})$ 是星象区域，所以 $\overline{ow_1}\subset f(D_{r_2})\subset f(D)$，即 $\overline{ow_1}\subset f(D_r)$. 故 $f(D)$ 是星象区域，因此 $f(z)\in S^*$.

（2）若 $f(z)\in K$，在 $f(D)$ 是凸区域. 要证明 $f(D_r)$ 为凸区域，只要证明 $\forall w_1,w_2\in f(D_r)$，有 $\overline{w_1w_2}\in f(D_r)$ 即可.

因线段 $\overline{w_1w_2}$ 的方程为 $\mu=tw_1+(1-t)w_2,(t\in[0,1])$. 由于 $w_1,w_2\in f(D_r)$，所以 $w_1=f(z_1), w_2=f(z_2)$，则 $z_1\ne z_2, |z_1|<r, |z_2|<r$. 不妨设 $|z_1|\le|z_2|$. 考虑下面的函数

$$\varphi(z)=(1-t)f(z)+tf(\frac{z_1}{z_2}z),(|z|<1,t\in[0,1]).$$

显然$\varphi(z)$在D内解析$(\because|\frac{z_1}{z_2}z|<1)$.对$\forall z\in D, w=f(z)\in f(D), w^*=f(\frac{z_1}{z_2}z)\in f(D)$.而$f(D)$是凸区域，故$\overline{ww^*}\in f(D)$，当$t\in[0,1]$时，有

$$(1-t)w+tw^*\in f(D).$$

即

$$\varphi(z)=(1-t)f(z)+tf(\frac{z_1}{z_2}z)\in f(D),(z\in D,t\in[0,1]).$$

于是$\eta(z)=f^{-1}[\varphi(z)]$在D内解析，且$|\eta(z)|<1$. 又因$\varphi(0)=0, f^{-1}(0)=0$，所以$\eta(0)=0$.由Schwarz引理1.1.2知 $|\eta(z)|\le|z|$. 令$z=z_2$，得到

$$\varphi(z_2)=(1-t)f(z_2)+tf(\frac{z_1}{z_2}z_2)\in f(D)=tw_1+(1-t)w_2$$

由此推出

$$|\eta(z_2)|=|f^{-1}[\varphi(z_2)]|=|f^{-1}[tw_1+(1-t)w_2]|\le|z_2|<r,$$

即在映射$w=f(z)$下，线段$\overline{w_1w_2}$上的任意一点$(tw_1+(1-t)w_2)$的原象均在D_r内.因此

$$(tw_1+(1-t)w_2)\in f(D_r),(t\in[0,1]).$$

即$\overline{w_1w_2}\in f(D_r)$，故$f(D_r)$为凸区域.

反之，设$w=f(z)$，对$\forall r\in(0,1)$，$f(D_r)$为凸区域. 要证$f(z)\in K$，只要证明$f(D)$是凸区域即可.

设$\forall w_1,w_2\in f(D)$，且$w_1\ne w_2$，则$f(z_1)=w_1, f(z_2)=w_2$, $z_1\ne z_2$ $z_1,z_2\in D$.

不妨设$|z_1|\le|z_2|=r_2<1$，由此可知$\forall w_1,w_2\in f(D_{r_2})$，而$f(D_{r_2})$为凸区域，所以$\overline{w_1w_2}\in f(D_{r_2})\subset f(D)$，即$\overline{w_1w_2}\subset f(D)$，$f(D)$为凸区域，证毕.

定理 2.2.2 若 $w=f(z)\in S$，则

（1）$f(z)\in S^* \Leftrightarrow p(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\in P$ （或 $|\arg[\dfrac{zf'}{f}]|<\dfrac{\pi}{2}$）；

（2）$f(z)\in K \Leftrightarrow p(z)=1+\dfrac{zf''}{f'}\in P$ （或 $|\arg\dfrac{(zf')'}{f'}|<\dfrac{\pi}{2}$）.

证 （1）先证必要性. 设 $w=f(z)$ 在 D 内星象，由 S^* 的定义和从属原理推出

$$\{tf(z):z\in D_r\}\subset\{f(z):z\in D_r\}=f(D_r),(t\in[0,1],r\in(0,1).$$

因此后一区域仍为星象区域，从几何上看 $\arg f(re^{i\theta})$ 应在区间 $0\le\theta\le 2\pi$ 内递增，因此

$$\mathrm{Re}[re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}]=\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}[\log f(re^{i\theta})]=\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta})\ge 0. \quad (2.2.1)$$

由因 $f(0)=0, f'(0)=0, p(0)=1$，由此推出 $p(z)\in P$.

其次，证明充分性：设 $p(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\in P$，则对于 $0<|z|<1, f(z)\neq 0$，否则 $p(z)$ 就有极点. 若 A_m 是 $f(z)$ 的展开式中第一个非零系数，则有 $m=p(z)=1$，故 $f(0)=0, f'(0)=0$，由（2.2.1）式推出 $\arg f(re^{i\theta})$ 为 $\theta\in(0,2\pi]$ 的递增函数，且总增量为

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta})d\theta=\mathrm{Re}[\frac{1}{i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz]=2\pi. \quad (2.2.2)$$

其中 $z=re^{i\theta}, r\in(0,1)$，且圆周 $|z|=r$ 对应的像曲线 $f(|z|=r)$ 为简单闭曲线，不可能与 $w=0$ 出发的射线有两个交点，所以 $|z|=r$ 与 $f(|z|=r)$ 一一连续对应. 因此 $f(z)$ 在 D_r 内单叶. 并且对每个 $r<1$，$f(D_r)$ 是星象区域，从而 $f(D)$ 为星象区域，即 $f(z)$ 在 D 内星象.

（2）必要性：设 $f(z)$ 为凸象函数. 我们先证明

$$c(r)=\{f(z):|z|=r\}(r\in(0,1))$$

是凸曲线，若$|z_1|\le|z_2|<r$，令

$$w_1=f(z_1),w_2=f(z_2),w_0=tw_1+(1-t)w_2,$$

有

$$tf(\frac{z_1}{z_2}z)+(1-t)f(z_2)\in\{f(z):|z|<r\}=f(D_r)$$

这表明$f(D_r)$为凸区域，因而$c(r)$是凸曲线.

下面只要证明对$\forall r\in(0,1)$，$f(D_r)$为凸区域$\Leftrightarrow 1+\mathrm{Re}\frac{zf''}{f'}>0$即可.

Γ_r为$f(D_r)$的边界，其参数方程为$w=f(re^{i\varphi})=\rho e^{i\phi}$，因$f\in S$，所以$\Gamma_r$为解析曲线，当$z=re^{i\varphi}$沿$|z|=r$正向移动，圆$|z|=r$在此点的切线与实轴正向的夹角为$\varphi+\frac{\pi}{2}$，对应点$w=\rho e^{i\phi}$沿$\Gamma_r$正向移动，在该点处$\Gamma_r$的切线与实轴正向,由导数几何意义知,夹角$\phi=\varphi+\frac{\pi}{2}+\arg f'(re^{i\varphi})$. 所以$f(D_r)$为凸象区域当且仅当$\varphi$增加时，$\phi$也随之增加，即

$$\frac{d\phi}{d\varphi}=1+\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f'(re^{i\varphi})\ge 0(\varphi\in[0,2\pi]). \tag{2.2.3}$$

因为$f(0)=0$，所以在Γ_r上$f'(re^{i\varphi})\ne 0$.故可取对数而

$$\ln f'(re^{i\varphi})=\ln|f'(re^{i\varphi})|+i\arg f'(re^{i\varphi}).$$

两端对φ求导，得

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f'(re^{i\varphi})=\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}. \tag{2.2.4}$$

故$f(D_r)$为凸区域. 当且仅当在$|z|=r$上

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}=1+\mathrm{Re}\frac{zf''}{f'}\ge 0. \tag{2.2.5}$$

利用调和函数的极值原理（定理 1.6.4）知，（2.2.5）不能取等号. 证毕.

推论 2.2.1 函数 $f(z)\in K$ 当且仅当 $zf'(z)\in S^*$.

证 由于

$$z\frac{d}{dz}[zf'(z)]/zf'(z)=1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

由定理 2.2.2 即得结论.

定理 2.2.3 设 $f(z)\in K$，则

$$\operatorname{Re}g(z,t)=\operatorname{Re}\{\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(t)}-\frac{z+t}{z-t}\}\ge 0,(z,t\in D). \tag{2.2.6}$$

该不等式蕴涵着

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\frac{1}{2},\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z}>\frac{1}{2},(z\in D) \tag{2.2.7}$$

（2.2.7）式中的第二个不等式可以表示为 $\frac{f(z)}{z}\prec\frac{1}{(1-z)}$，因而蕴涵

$$\frac{|z|}{1+|z|}\le|f(z)|\le\frac{|z|}{1-|z|},(z\in D) . \tag{2.2.8}$$

证 若 $f(z)\in K$，则 $f(z)$ 在 D 内单叶，因此函数

$$g(z,t)=\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(t)}-\frac{z-t}{z+t}$$

在 $z\in D,t\in D$ 时解析，这是因为

$$\lim_{t\to z}g(z,t)=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}(z\in D). \tag{2.2.9}$$

存在.又因 $c(r)$ 是凸曲线，于是 $\arg[f(re^{i\varphi})-f(re^{i\theta})]$ 为关于 $\varphi\in(\theta,\theta+2\pi)$ 的递增函数. 因此当 $z=re^{i\varphi}\ne t=re^{i\theta}$ 时，有

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)-f(t)}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg[f(re^{i\varphi})-f(re^{i\theta})]\ge 0;$$

由于此时有 $\operatorname{Re}[\frac{z+t}{z-t}]=0$，且必有 $\operatorname{Re}g(z,t)\ge 0(|z|=|t|=r<1)$. 由连续性推出 $z=t$ 时也成立. 这是因为先对 $|z|<r$，然后对 $|t|<r$ 应用最大模原理（引理 1.1.1），

便知当 $|t|<r$ 时，有 $\mathrm{Re}\, g(z,t)\geq 0$. 令 $r\to 1$ 时推出该不等式对 $|z|<1$，$|t|<1$ 也成立. 因此从（2.2.9）式和（2.2.6）式有可以推出 $1+\mathrm{Re}\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}>0$ 式成立. 证毕.

由推论 2.2.1 和定理 2.2.3 得到如下推论：

推论 2.2.2 若 $f(z)\in S^*$，则有

$$\mathrm{Re}\{\frac{z(\int_0^z \frac{f(t)}{t}dt)'}{\int_0^z \frac{f(t)}{t}dt-\int_0^{\xi} \frac{f(t)}{t}dt}+\frac{z+t}{z-t}\}\geq 0$$

$$（或 \mathrm{Re}\{\frac{f(z)}{\int_0^z \frac{f(t)}{t}dt-\int_0^{\xi} \frac{f(t)}{t}dt}+\frac{z+t}{z-t}\}\geq 0）.$$

定理 2.2.4 设 $f(z)\in S$，

（1）若 $f(z)\in S^*$，则 $|a_n|\leq n\ (n=2,3,\cdots)$；

（2）若 $f(z)$ 为 D 中的奇星象函数 $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}\in S^*$ 时，有

$$|a_{2n+1}|\leq 1, (n=1,2,\cdots);$$

（3）若 $f(z)\in K$，则 $|a_n|\leq 1, (n=2,3,\cdots)$；

分别取函数

$$f(z)=\frac{z}{(1-\eta z)^2}, f(z)=\frac{z}{1-\eta z^2}, f(z)=\frac{z}{1-\eta z}, |\eta|=1 \qquad (2.2.10)$$

时，（1）（2）（3）中不等式的等号成立.

证 （1）若 $f(z)\in S^*$，则由定理 2.2.2 知

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n\in P$$

比较等式 $zf'(z)=f(z)p(z)$ 两端展开式系数，即得递推公式

$$a_n=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}p_{n-k}a_k (n=2,3,\cdots)$$

再根据推论 2.1.2 可知 $|p_{n-k}|\leq 2$，故

$$|a_n| \le \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}|a_k| \quad (n=2,3,\cdots), \tag{2.2.11}$$

设$n=2$时，有$|a_2|=|p_1|<2$，

$$|a_3|=\frac{1}{2}|p_2+p_1a_2| \le \frac{1}{2}(2+2\times 2)=3$$

设$k<n$时，$|a_k|\le k$，于是当$k=n$时，有

$$\begin{aligned}|a_n| &\le \frac{|p_{n-1}|+|a_2||p_{n-2}|+\cdots+|a_{n-1}||p_1|}{n-1} \\ &\le \frac{2(1+2+\cdots+n-1)}{n-1}=n\end{aligned}$$

由数学归纳法知，$|a_n|\le n (n=2,3,\cdots)$. 由 Koebe 函数 $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n \in S^*$，显然$|a_n|=n$，故$|a_n|\le n$为精确的，不能再改进.

（2） 由假设知 $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}\in S^*$. 显然$(f(z))^{-1}$与$zf'(z)$都是奇函数，从而$\varphi(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)}$是偶函数，且$\varphi(0)=1$，当$z\neq 0$时，$f(z)\neq 0$，故$\varphi(z)$在$|z|<1$内解析，又是偶函数，于是有

$$\varphi(z)=1+b_2z^2+b_4z^4+\cdots+b_{2n}z^{2n}+\cdots, \tag{2. 2. 12}$$

又 $f'(z)=\frac{\varphi(z)f(z)}{z}$，即

$$\begin{aligned}&1+3a_3z^2+\cdots+(2n+1)a_{2n+1}z^{2n}+\cdots \\ &=(1+b_2z^2+b_4z^4+\cdots+b_{2n}z^{2n}+\cdots)(1+a_3z^2+a_5z^4+\cdots+a_{2n+1}z^{2n}+\cdots)\end{aligned}$$

比较上式两端系数得

$$\begin{aligned}&3a_3=a_3+b_2 \\ &\cdots\cdots \\ &(2n+1)a_{2n+1}=b_{2n}+b_{2n-2}a_3+b_{2n-4}a_5+\cdots b_2a_{2n-1}+a_{2n+1} \\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

由此推出

$$2a_3=b_2,\cdots,2na_{2n+1}=b_{2n}+b_{2n-2}a_3+b_{2n-4}a_5+\cdots b_2a_{2n-1},\cdots.$$

又因 $f(z)\in S^*$，由定理 2.2.2 知，

$$\mathrm{Re}\,\varphi(z)=\mathrm{Re}[\frac{zf'(z)}{f(z)}]>0\cdot$$

从而由推论 2.1.2 知，在（2.2.12）中有

$$|b_{2n}|\leq 2,\ (n=1,2,\cdots)$$

由此得到

$$|a_3|=(|b_2|/2)\leq 1$$

设当$k=2,3,\cdots,n$时，有$|a_{2k-1}|\leq 1$，则

$$\begin{aligned}|a_{2n+1}|&=\frac{1}{2n}|b_{2n}+b_{2n-2}a_3+\cdots+b_2a_{2n-1}|\\&\leq\frac{1}{n}(1+|a_3|+|a_5|+\cdots+|a_{2n-1}|)\leq 1\end{aligned}$$

由数学归纳法知$|a_{2n+1}|\leq 1\ (n=1,2,\cdots)$；

（3）由于

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}=z\frac{2a_2+6a_3z+12z^2+\cdots}{1+2a_2z+3a_2z^2+\cdots},$$

当$z=0$时，其值为 0. 考虑$\psi(z)=z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}+1$，显然$\psi(0)=1$，且在 D 内解析，故有展开式

$$\psi(z)=1+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots,\qquad(2.2.13)$$

因 $f(z)\in K$，由定理 2.2.2 知$\mathrm{Re}\,\psi(z)>0$. 于是根据推论 2.1.2 中的结论知

$$|b_n|\leq 2,(n=1,2,\cdots).$$

由（2.2.13）式得到

$$f''(z)=(b_1+b_2z+\cdots+b_nz^{n-1}+\cdots)f'(z)$$

即

$$\begin{aligned}&2a_2+6a_3z+\cdots+n(n+1)a_{n+1}z^{n-1}+\cdots\\&=(b_1+b_2z+\cdots+b_nz^{n-1}+\cdots)(1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots)\end{aligned}$$

由此推出

$$2a_2=b_1, 6a_3=2a_2b_1+b_2,\cdots, n(n+1)a_{n+1}=na_nb_1+(n-1)a_{n-1}b_2+\cdots 2a_2b_{n-1}+b_n$$

于是，有

$$|a_2|=|\frac{b_1}{2}|\le 1, |a_3|\le \frac{1}{6}(2|a_2b_1|+|b_2|)\le 1.$$

设$k\le n$时，有$|a_k|\le 1$，于是当$k=n+1$时，有

$$|a_{n+1}|\le \frac{1}{n(n+1)}[n|a_nb_1|+(n-1)|a_{n-1}b_2|+\cdots|b_n|]$$

$$\le \frac{1}{n(n+1)}[2n+2(n-1)+\cdots+2\cdot 2+2]=1$$

由数学归纳法知 $|a_n|\le 1(n=2,3,\cdots)$，当函数$f(z)=\frac{z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\in S$时，可以证明$\frac{z}{1-z}\in K$. 这里$a_n=1(n=1,2,\cdots)$，故定理中的$|a_n|\le 1$为精确的，不能再改进.

定理 2.2.5（积分表达式） 设$f(z)\in S$，则

（1）$f(z)\in S^*$当且仅当存在增函数$\alpha(t),\alpha(2\pi)-\alpha(0)=1$，使得

$$f(z)=z\exp[2\int_0^{2\pi}\log(\frac{1}{1-e^{-it}z})d\alpha(t)](z\in D). \qquad (2.2.14)$$

（2）$f(z)\in K$当且仅当存在增函数$\alpha(t),\alpha(2\pi)-\alpha(0)=1$，使得

$$f(z)=\int_0^z\{\exp[2\int_0^{2\pi}\log(\frac{1}{1-e^{-it}z})d\alpha(t)]\}dz, \qquad (2.2.15)$$

证 （1）当$f(z)\in S^*$,则由定理 2.1.5 和定理 2.2.2 可知

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\alpha(t)$$

由此推出

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z}+\int_0^{2\pi}\frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z}d\alpha(t)$$

两端关于z积分，得到

$$\log\frac{f(z)}{z}=-2\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)d\alpha(t)$$

由此推出（2.2.14）式成立.上述证明是可逆的.

（2）利用推论 2.2.1 即得到（2.2.15）式. 证毕.

推论 2.2.3 设 $f(z)\in S^*$，则对任意实数 $\alpha, 0<\alpha<1$，函数

$$F(z)=\int_0^z\left[\frac{f(t)}{t}\right]^\alpha dt$$

是 D 内的单叶凸象函数.

证 若 $f(z)\in S^*$，由定理 2.2.5 存在 $[0,2\pi]$ 上的增函数 $\alpha(t)$, $\int_0^{2\pi}\alpha(t)dt=1$，使得

$$f(z)=z\exp\{-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)d\alpha(t)\}$$

要证 $F(z)\in K$，由推论 2.2.1 只需证明 $zF'(z)\in S^*$ 即可.

$$zF'(z)=z[\frac{f(z)}{z}]^\alpha=z\exp\{-\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)d\alpha(t)\}$$

由于 $0<\alpha<1$，所以 $zF'(z)\in S^*$. 从而 $F(z)\in K$，证毕.

推论 2.2.4 设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in A, z\in D$，那么

（1）若 $f(z)$ 在 D 内有 $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\le 1$，则 $f(z)\in S^*$，从而在 D 内单叶；

（2）若 $f(z)$ 在 D 内满足 $\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|\le 1$，则 $f(z)\in K$，且在 D 内单叶；

证 （1）因

$$|zf'-f|\le\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^n$$

$$\le|z|-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n\le|f(z)|, z\in D$$

由此得到

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\le 1$$

即 $\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0$，$f(z)$ 在 D 内单叶的.

（2） 因 $zf' = z(z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n)' = z+\sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$，且 $f\in K \Leftrightarrow zf'(z)\in S^*$，由（2.2.1）可知

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \le 1$$

此时，$f\in K$，即 $f(z)$ 在 D 内单叶．证毕.

从定理 2.2.5 容易得到偏差定理:

推论 2.2.5 设 $f(z)\in S$，$|z|=r<1$,

（1）若 $f(z)\in S^*$，则

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

（2）若 $f(z)\in K$，则

$$\frac{r}{1+r} \le |f(z)| \le \frac{r}{1-r}$$

分别取函数 $f(z)=\frac{z}{(1-\eta z)^2}, f(z)=\frac{z}{1-\eta z}\ (|\eta|=1)$ 时，以上两个不等式的等号成立.

定理 2.2.6 对 $\forall f(z)\in S^*(\beta)$，有

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{2(1-\beta)}M(r,f)=\rho\le 1, M(r,f)=\left|f\left(r^{i\theta}\right)\right|, \tag{2.2.16}$$

且 $\rho=1$ 当且仅当 f 为 $K_\beta = z/(1-z)^{2(1-\beta)}$ 的旋转.

证 若 $f(z)\in S^*(\beta)$，则由 $S^*(\beta)$ 的定义可知

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \beta+(1-\beta)p(z)$$

由此，得到

$$\frac{1-(1-2\beta)r}{1+r} \le \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+(1-2\beta)r}{1-r} \tag{2.2.17}$$

且 K_β 的旋转时上述不等式的等号成立．故

$$\frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\theta})|\le\frac{1+(1-2\beta)r}{1-r}$$

对上式两端从 r_1 到 r_2 积分，得

$$\frac{(1-r_2)^{2(1-\beta)}}{r_2}|f(r_2e^{i\theta})|<\frac{(1-r_1)^{2(1-\beta)}}{r_1}|f(r_1e^{i\theta})|. \tag{2.2.18}$$

其中 $0<r_1<r_2<1,\theta\in[0,2\pi]$，选取 θ 使得 $|f(r_2e^{i\theta})|=M_\infty(r_2,f)$，则

$$\frac{(1-r_2)^{2(1-\beta)}}{r_2}M_\infty(r_2,f)<\frac{(1-r_1)^{2(1-\beta)}}{r_1}|f(r_1e^{i\theta})|\le\frac{(1-r_1)^{2(1-\beta)}}{r_1}M_\infty(r_1,f)$$

故 $r^{-1}(1-r)^{2(1-\beta)}M_\infty(r,f)$ 为严格递增函数，因此

$$\lim_{r\to1}(1-r)^{2(1-\beta)}M_\infty(r,f)=\rho$$

存在，又对 $f(z)\in S^*(\beta)$，显然 $M_\infty(r,f)\le\frac{r}{(1-r)^{2(1-\beta)}}$，故 $\rho\in[0,1]$，$\rho=1$ 当且仅当 f 为 $K_\beta(z)$ 的旋转. 证毕.

定义 2.2.3 定理 2.2.6 中的 ρ 称为 $S^*(\beta)$ 的增长指数.

定理 2.2.7 若 $f(z)\in S^*(\beta),\rho>0$，则存在唯一径向最大增长方向.

证 （1）证明其存在性. 设 $r_n\to1$ 且 r_n 递增，选取 θ_n 使得

$$|f(re^{i\theta})|=M_\infty(r_n,f).$$

则对 $r<r_n$，由（2.2.18）式得

$$\rho\le\frac{(1-r_n)^{2(1-\beta)}}{r_n}|f(r_ne^{i\theta_n})|\le\frac{(1-r)^{2(1-\beta)}}{r}|f(re^{i\theta_n})|$$

又{ θ_n }是[0,2 π]上的无穷点列，故{ θ_n }有聚点 θ_0，因而

$$\rho\le\frac{(1-r)^{2(1-\beta)}}{r}|f(re^{i\theta})|\le\frac{(1-r)^{2(1-\beta)}}{r}M_\infty(r,f)$$

由 ρ 的定义，可知 $\lim_{r\to1}r^{-1}(1-r)^{2(1-\beta)}|f(re^{i\theta_0})|=\rho$.

（2）证明唯一性. 假设最大径向增长方向不是唯一，则存在$e^{i\theta_1}, e^{i\theta 2}, \theta_1 \neq \theta_2$，使$\lim_{r\to 1} r^{-1}(1-r)^{2(1-\beta)} | f(re^{i\theta_k}) |= \rho, k=1,2.$

$S^*(\beta)$的闭凸包为

$$\overline{co}S^*(\beta) = \{f : f(z) = \int_{|x|=1} \frac{z}{(1-xz)^{2(1-\beta)}} d\mu(x)\},$$

μ是X={x:|x|=1}上的概率测度，因此$\forall f \in S^*(\beta)$有表示

$$f(z) = \int_{|x|=1} \frac{zd\mu(x)}{(1-xre^{i\theta})^{2(1-\beta)}}$$

$$(1-\beta)e^{2(1-\beta)} | f(re^{i\theta_k}) |=| \int_{x-\{e^{i\theta_k}\}} \frac{z(1-r)^{2(1-\beta)}}{(1-xre^{i\theta})^{2(1-\beta)}} d\mu + \mu\{re^{i\theta_k}\} |$$

因$| \frac{r(1-r)^{2(1-\beta)}}{1-xre^{i\theta}} | \le 1$. 由 Lebesgus 控制收敛定理可知，当$r \to 1$时，上式右端的积分趋于0，因而

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{2(1-\beta)} | f(re^{i\theta_k}) |= \mu(e^{i\theta_k}) = \rho$$

故μ在$e^{-i\theta_k}$点不为零. 令$g(z) = z[f(z)/z]^{\frac{1}{(1-\beta)}} \in S^*(0)$，则$f(z)$在$e^{-i\theta_k}(k=1,2)$为二阶极点. 这与$g$的单叶性矛盾. 证毕.

类似的方法可以得到:

定理 2.2.8 对$\forall f(z) \in K(\beta)$，有

$$\lim_{r\to 1}(1-r)M_\infty(r,f) = \rho \le 1$$

且$\rho = 1$当且仅当$K_\beta = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\beta)}}$的旋转.

定理 2.2.9 若$f(z) \in K(\beta), \rho > 0$，则存在唯一的最大增长方向.

设α, η是实数，γ为复数，对于$S^*(A,B)$（或$K(A,B)$）上定义积分算子$I(f)(z) = F(z)$，其中

$$F(z) = (\frac{\alpha+\gamma+\eta}{z^\gamma} \int_0^z f(t)^\alpha t^{\gamma+\eta-1} dt)^{1/(\alpha+\eta)} \qquad (2.2.19)$$

其中，各个幂函数均取主值，以下相同.

我们需要如下引理

引理 2.2.1 设$M(z)$和$N(z)$是D内的解析函数，且$M(0)=N(0)$，如果$N(z)$将D映射成一关于原点成星形的区域（可能是多叶的），则当

$$\frac{M'(z)}{N'(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}, z\in D$$

时，有

$$\frac{M(z)}{N(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}, z\in D$$

证 我们分两步来证明.

首先，证明$p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in P(A,B)$当且仅当$|p(z)-m|<M$,其中

$$m=\frac{1-AB}{1-B^2}, \quad M=\frac{A-B}{1-B^2}.$$

当 $B\neq -1$时，若$p(z)\in P(A,B)$，由从属定义，存在D内满足条件$w(0)=0,|w(z)|<1$的解析函数$w(z)$，使得

$$p(z)=\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}$$

由此可知

$$p(z)-m=\frac{(1-m)+(A-mB)w(z)}{1+Bw(z)}=M\frac{B+w(z)}{1+Bw(z)}, g(z)=\frac{B+w(z)}{1+Bw(z)}$$

则$|g(z)|<1(z\in D)$. 即$|p(z)-m|<M$成立.

反之，若$|p(z)-m|<M(z\in D)$，则$\left|\frac{p(z)}{M}-\frac{m}{M}\right|<1$.

令 $h(z)=\frac{p(z)-m}{M}, w(z)=\frac{h(z)-h(0)}{1-h(0)h(z)}$. 显然$w(z)$在D内解析，且$w(0)>0,|w(z)|<1$. 通过计算可知

$$w(z)=\frac{p(z)-1}{A-Bp(z)}, \text{ 即 } p(z)=\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}, p(z)\in P(A,B).$$

当$B=-1$时，把条件$|p(z)-m|<M$写出如下等价形式

$$|\frac{p(z)-\frac{1-A}{1-B}}{1-\frac{1-A}{1-B}}-\frac{1}{1+B}|<\frac{1}{1+B}$$

上式中令 $B\to -1$ 时，得到 $\mathrm{Re}\,p(z)>\frac{1-A}{2}$. 由此可得 $p(z)\prec\frac{1+Az}{1-z}$，即 $p(z)\in p(A,-1)$.必要性显然.

其次，正充分性.置 $p(z)=\frac{M'(z)}{N'(z)}$，则 $p(z)\in p(A,B)$，且有 $M'(z)=p(z)N'(z)$. 在 D 内任取一点 z_0，考虑 w 平面上 $w=N(z)$ 的像区域 N(D). 设 Γ 是联结 $w=0$ 和 $w=N(z_0)$ 的直线段. 由于N(D)是一星形域，故 $\Gamma\subset N(D)$.令L是 Γ 关于 $w=N(z)$ 的原象，它联结 $z=0,z=z_0$，于是 L 是一条简单的解析曲线. 由于 $M(z)$ 在 D 内是解析的，所以

$$M(z_0)=\int_L M'(z)dz=\int_L p(z)N'(z)dz$$

当 $t\in L$ 时，令 $N(t)=\rho(t)e^{i\phi(t)}$，那么 $\phi=\phi(t)$ 在 L 上常数，而

$$\frac{M(z_0)}{N(z_0)}=\frac{1}{Re^{i\phi}}\int_\Gamma p(t)dN(t)=\frac{1}{R}\int_0^R p(t)d\rho(t)$$

其中 $R=\rho(z_0)$，由于 $p(z)\in P(A,B)$，由(1)知，当 $t\in L\subset D$ 时，$|p(z)-m|<M$，m,M 与（1）相同，从而

$$|\frac{M(z_0)}{N(z_0)}-1|=|\frac{1}{R}\int_0^R p(t)d\rho(t)-m|$$

$$=|\frac{1}{R}\int_0^R(p(t)-m)d\rho(t)|\le\frac{1}{R}\int_0^R Md\rho(t)=M$$

再利用（1）即得所需的结论.证毕.

定理 2.2.10 设 $\alpha>0,\eta\ge 0,\gamma$ 为满足条件 $\mathrm{Re}\{\gamma\}\ge-(\eta+\frac{\alpha(1-A)}{1-B})$ 的复常数，如果 $f(z)\in S^*(A,B)$，则由（2.2.19）式定义的函数 $F(z)\in S^*(\frac{\alpha A+\eta B}{\alpha+\eta},B)$.

证 （2.2.19）式两端对数导数，得

$$(\alpha+\eta)\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{z^{\gamma+\eta}f^{\alpha}(z)-\gamma\int_0^z t^{\gamma+\eta-1}f^{\alpha}(t)dt}{\int_0^z t^{\gamma+\eta-1}f^{\alpha}(t)dt}$$

命 $M(z)=z^{\gamma+\eta}f^{\alpha}(z)-\gamma\int_0^z t^{\gamma+\eta-1}f^{\alpha}(t)dt, N(z)=\int_0^z t^{\gamma+\eta-1}f^{\alpha}(t)dt$ ，则 $M(z)$ 和 $N(z)$ 都是 D 内的解析函数，且 $M(0)=N(0)=0$. 由 $N(z)=t^{\gamma+\eta-1}f^{\alpha}(t)$ 知，$N(z)$ 在 D 内除原点外无其它零点，于是

$$1+\mathrm{Re}\frac{zN'(z)}{N(z)}=\mathrm{Re}\{\gamma+\eta+\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}\}$$

从 $f(z)\in S^*(A,B)$ 知，$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\frac{1-A}{1-B}$. 再由 $\mathrm{Re}(\gamma+\eta)\geq-\alpha\frac{1-A}{1-B}$，可得

$$\mathrm{Re}\{1+\frac{zN''(z)}{N'(z)}\}\geq\mathrm{Re}\{\gamma+\eta+\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}\}\geq 0.$$

从而 $N(z)$ 将 D 映射成包含原点的凸性区域，当然这个区域关于原点是星形的.

另外，由 $M(z)$ 和 $N(z)$ 的定义

$$\frac{M'(z)}{N'(z)}=\eta+\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\eta+\alpha\frac{1+Az}{1+Bz}, z\in D$$

再由引理 2.2.1，最后得到

$$\frac{M(z)}{N(z)}\prec\eta+\alpha\frac{1+Az}{1+Bz}=(\alpha+\eta)\frac{1+\frac{\alpha A+\eta\beta}{\alpha+\eta}}{1+Bz},$$

即

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}\prec\frac{1+\frac{\alpha A+\eta\beta}{\alpha+\eta}z}{1+Bz}, z\in D.$$

从而 $F(z)\in S^*(\frac{\alpha A+\eta B}{\alpha+\eta},B)$. 证毕.

因 $f\in K(A,B)\Rightarrow zf'(z)\in S^*(A,B)$,利用定理 2.2.10 不难证明

推论 2.2.6 在定理 2.2.10 的条件下，若 $f\in K(A,B)$，则由（2.2.19）式定义的

函数 $F(z)\in S^*(\frac{\alpha A+\eta B}{\alpha+\eta},B)$.

推论 2.2.7 设 $\alpha>0,\eta\geq 0,\gamma$ 为满足 $\text{Re}\{\gamma\}\geq-\eta$ 的复常数：

(1) 若 $f(z)\in S^*$，则由（2.2.19）式定义的函数 $F(z)\in S^*(\frac{\alpha-\eta}{\alpha+\eta},-1)$；

(2) 若 $f(z)\in K$，则由（2.2.19）式定义的函数 $F(z)\in K(\frac{\alpha-\eta}{\alpha+\eta},-1)$.

定理 2.2.11 若 $f(z)\in S^*$，令

$$F(z)=\frac{1}{2}\{f(z)+zf'(z)\} \tag{2.2.20}$$

则 $\frac{1}{\rho_0}F(\rho_0 z)\in S^*,\rho_0=\frac{1}{2}$ 不能再大.

证 由（2.2.20）式得到

$$f(z)=\frac{z}{2}\int_0^z F(t)dt$$

对上式取对数导数，可得

$$1+\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{zF(z)}{\int_0^z F(t)dt}$$

从而

$$F(z)=(1+\frac{zf'(z)}{f(z)})\cdot\frac{1}{z}\int_0^z F(t)dt=\frac{1}{2}(1+\frac{zf'(z)}{f(z)})f(z)$$

但 $f(z)\in S^*$，故存在 D 内解析函数 $\varphi(t),\varphi(0)=0,|\varphi(z)|<1$，使得

$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1-\varphi(z)}{1+\varphi(z)}$. 将其代入上式，便得

$$F(z)=\frac{f(z)}{1+\varphi(z)}$$

上式两端取对数导数，得到

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{z'f(z)}{f(z)}-\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{1-\varphi(z)}{1+\varphi(z)}-\frac{z\varphi'(z)}{1+\varphi(z)}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)}&=\text{Re}[\frac{1-\varphi(z)}{1+\varphi(z)}]-\text{Re}[\frac{z\varphi'(z)}{1+\varphi(z)}]\\&\geq\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1+|\varphi(z)|^2}-\frac{|z\varphi'(z)|}{|1+\varphi(z)|}.\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

再利用定理 1.6.11 中的（1.6.11）式，推出

$$|z\varphi'(z)|\le|z|\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1+|z|^2}$$

从（2.2.21）得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)}&\ge\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1+\varphi(z)|}\left[\frac{1}{|1+\varphi(z)|}-\frac{|z|}{1-|z|^2}\right]\\&\ge\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1+\varphi(z)|}\left[\frac{1}{1+|\varphi(z)|}-\frac{|z|}{1-|z|^2}\right]\\&\ge\frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1+\varphi(z)|}\left[\frac{1}{1+|z|}-\frac{|z|}{1-|z|^2}\right]\\&\ge\frac{1-|\varphi(z)|^2}{(1-|z|^2)|1+\varphi(z)|}[1-2|z|]\end{aligned}$$

故当$|z|<\frac{1}{2}$时，有$\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)}>0$. 由此得到$F(z)$在$|z|<\frac{1}{2}=\rho_0$内是星象函数，即

$\frac{1}{\rho_0}F(\rho_0 z)\in S^*$.

由于当$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$时，$F(z)=\frac{1}{2}(f+zf')=\frac{z}{(1-z)^3}$，且$\frac{zF'}{F}=\frac{1+2z}{1-z}$，此时当$z=-\frac{1}{2}$时，$\frac{zF'}{F}=0$，因此$\rho_0=\frac{1}{2}$不能再大. 证毕.

推论 2.2.8 若$f(z)\in K$，则由$F(z)=\frac{1}{2}[f(z)+zf'(z)]$定义的函数$F(z)$在$|z|<\frac{1}{2}=\rho_0$内是凸象函数，即$\frac{1}{\rho_0}F(r_0 z)$是D中的凸函数，$\rho_0=\frac{1}{2}$不能再大.

函数类S^*,K还有其它性质这里不再介绍详见文献[3]−[5]，还可以进一步讨论S^*,K两类函数的特殊子类：

设$f(z)\in S$，A, B 为满足条件$-1\le B<A\le 1$的实数，若函数$f(z)$满足从属关系

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\quad（或 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}）$$

则称$f(z)\in S^*(A,B)$（或$f(z)\in K(A,B)$）. 显然

$$S^*(A,B)\subset S^*(-1,1)=S^*$$
$$K(A,B)\subset K(-1,1)=K, K(A,B)\subset S^*(A,B)$$

且当 $B=-1, A=1-2\beta(\beta\in[0,1])$ 时，还得到

$$S^*(1-2\beta,-1)=\{f(z)\in S:\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}>\beta\}=S^*(\beta);$$
$$K(1-2\beta,-1)=\{f(z)\in S:1+\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}>\beta\}=K(\beta).$$

类似于 K,S^* 的方法可以得到 $K(A,B)$ 和 $S^*(A,B)$ 的相应的性质，这里不叙述.

§2.3 近于凸函数 Bazilevich 函数

1. 近于凸函数

定义 2.3.1 设 $f(z)\in S$，如果存在 $g(z)\in S^*$，使得

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{g(z)}>0(z\in D)\ （或\frac{zf'(z)}{g(z)}\in P）, \tag{2.3.1}$$

称 $f(z)$ 为近于凸函数，其全体记为 C. 不等式（2.3.1）等价于

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{h'(z)}>0(z\in D) \tag{2.3.2}$$

$$（或|\arg\frac{f'(z)}{h'(z)}|<\frac{\pi}{2},\frac{f'(z)}{h'(z)}\in P）$$

其中 $h(z)\in K$.

由定义可知，若 $f(z)\in C$，则 $f(z)\in S^*$. 反之不然.

定理 2.3.1 若 $f(z)\in C$，则 $f(z)$ 在 D 内单叶.

证 设 $f(z)\in C$，利用（2.3.2）式，反函数 $h^{-1}(w)$ 在凸区域 $H=h(D)$ 内解析，

且$\varphi(w)=f[f^{-1}(w)]$满足

$$\operatorname{Re}\varphi'(w)=\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{h'(z)}>0(w=h(z)\in H). \tag{2.3.3}$$

因此对于$w_1,w_2\in H$，有

$$\operatorname{Re}\frac{\varphi(w_2)-\varphi(w_1)}{w_2-w_1}=\int_0^1\operatorname{Re}\varphi'[w_1+t(w_2-w_1)]dt>0$$

故$\varphi(w)$在H内单叶，从而$f(z)=\varphi(h(z))$在D内单叶. 证毕.

定理 2.3.2 设$f(z)$在D内解析单叶，则$f(z)\in C$当且仅当$f(D)$关于全复平面的余集是一些闭半直线的并，这些半直线的相应的开半直线互不相交.

定理 2.3.3 若$f(z)\in C$，则$|a_n|\le n,(n=1,2,\cdots)$.

证 若$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in C$，则$\exists g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n\in S^*$，使得$\left(zf'(z)\right)/g(z)\in P$.

假定

$$\frac{zf'(z)}{g(z)}=p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n. \tag{2.3.4}$$

由（2.3.4）式得到

$$na_n=b_n+\sum_{k=1}^{n-1}p_{n-k}b_k$$

又因$|p_n|\le 2,|b_n|\le n$，所以从上式得到

$$n|a_n|\le n+2\sum_{n=1}^{n-1}k=n^2$$

由此推出$|a_n|\le n(n=1,2,\cdots)$. 证毕.

作为近于凸函数的一个子类，取$g(z)=\dfrac{z}{1-z^2}$时（2.3.1）式变为$\operatorname{Re}[(1-z^2)f'(z)]>0$.

定义 2.3.2 设$f(z)\in S,z\in D$，如果

$$\operatorname{Im} f(z)=0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z=0. \qquad (2.3.5)$$

则称 $f(z)$ 为典型实照函数.

由典型实照函数的定义可知 $f(z)$ 的所有系数都是实数，反之，每个具有实系数的单叶函数都是典型实照函数，这是由于 $\operatorname{Im} f(z)=0$ 蕴含着

$$f(z)=\overline{f(z)}=f(\bar{z})，从而 z=\bar{z}，即 \operatorname{Im} z=0.$$

定理 2.3.4 设 $f(z)\in S, z\in D$，且具有实系数，则下列三条件等价：

（1）$f(z)$ 为典型实照函数；

（2）函数

$$(1-z^2)\frac{f(z)}{z}=1+a_2 z+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)z^n \in P; \qquad (2.3.6)$$

（3）存在增函数 $\alpha(t)(t\in[0,\pi])$，使得

$$f(z)=\int_0^{\pi}\frac{z}{1-2z\cos t+z^2}d\alpha(t), \alpha(\pi)-\alpha(0)=1. \qquad (2.3.7)$$

证 设 $f(z)$ 为典型实照函数，由定义可知 $\operatorname{Im} f(z)=0$ 当且仅当 $\operatorname{Im} z=0$，且 $f'(0)=1>0$，所以当 $\operatorname{Im} z\ge 0$ 时有 $\operatorname{Im} f(z)\ge 0$. 因此当 $z=re^{it}, t\in[0,2\pi]$ 时，有

$$\operatorname{Re}[(r^2-z^2)\frac{f(z)}{z}]=2r\sin t\cdot \operatorname{Im} f(re^{it})\ge 0, t\in[0,\pi]. \qquad (2.3.8)$$

对 $t\in[\pi,2\pi]$ 此式也成立. 由最大模原理（引理 1.1.1）可知，(2.3.8) 式对 $|z|<r$ 也成立. 令 $r\to 1^-$ 便得到（2）.

其次，若（2）成立，则由 P 中函数的积分表达式（定理 2.1.5），得到存在增函数 $\alpha(t)(t\in[0,\pi]), \alpha(2\pi)-\alpha(0)=1$，使得

$$\operatorname{Re}[(1-z^2)\frac{f(z)}{z}]=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\alpha(t)$$

再利用 $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$，容易推出（3）.最后（3）直接蕴含：对于 $\operatorname{Im} z>0$ 有 $\operatorname{Im} f(z)>0$. 因此推出（1）. 证毕.

推论 2.3.1 若$f(z)$为典型实照函数，则

$$|a_{n+1}-a_{n-1}|\le 2，|a_n|\le n(n=1,2,\cdots)$$

注 设$f(z)$在 D 内的典型实照函数，但不一定单叶，例如

$$f(z)=\frac{(1+z^2)z}{(1-z^2)^2}=z+3z^3+5z^5+\cdots$$

为典型实照函数，但该函数f在 D 内非单叶（因为不满足$|a_3-a_2^2|\le 1$）.

可以进一步讨论近于凸函数的特殊子类：

设$f(z)\in S$，若存在函数$g(z)\in S^*(A,B)(-1\le B<A\le 1)$，使得满足从属关系

$$\frac{zf'(z)}{g(z)}\prec\frac{1+Cz}{1+Dz}$$

其中$-1\le D<C\le 1$,则称$f(z)\in C(A,B;C,D)$.显然

$$C(A,B;C,D)\subset C(1,-1;1,-1)=C$$

还可以得到如下函数类：

$$C(A,B)=\{f\in S,\exists g\in S^*(A,B),使\frac{zf'(z)}{g(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\}$$

$$C(\alpha,\beta)=C(1-2\alpha,-1,1-2\beta,-1)=\{f\in S:\exists g\in S^*(A,B),使\ \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{g(z)}>\beta\}$$

其中$\alpha,\beta\in[0,1)$.

类似于讨论 C，可以讨论$C(A,B;C,D)$中函数的性质的.

定理 2.3.5 设$\eta\ge 0,\gamma$为满足条件$\mathrm{Re}\{\gamma\}\ge-\eta-\alpha\frac{1-A}{1-B}$的复常数，若$f(z)\in C(A,B)$，则由

$$F(z)=\left(\frac{1+\gamma+\eta}{z^\gamma}\int_0^z f(t)t^{\gamma+\eta-1}dt\right)^{1/(1+\eta)} \tag{2.3.9}$$

定义的函数$F(z)\in C(\frac{A+\eta B}{1+\eta},B)$.

证 定义函数$G(z)$为

$$G(z)=\left(\frac{1+\gamma+\eta}{z^{\gamma}}\int_0^z t^{\gamma+\eta-1}g(t)dt\right)^{1/(1+\eta)}\ . \tag{2.3.10}$$

由 $\mathrm{Re}\{\gamma\}\ge-\eta-\alpha\frac{1-A}{1-B}$ 及定理 2.2.10 可得 $G(z)\in S^*(\frac{A+\eta B}{1+\eta},B)$.

从 $C(A,B)$ 的定义和（2.3.10）式，推出

$$(1+\eta)\frac{F^{\eta}F'(z)}{G(z)z^{\eta-1}}=\frac{z^{\gamma}f^{1+\eta}(z)-\gamma\int_0^z t^{\gamma+\eta-1}f^{\eta+1}(t)dt}{\int_0^z t^{\gamma+\eta-1}g(t)dt}$$

在上式中，命

$$M(z)=z^{\gamma}f^{\eta+1}(z)-\gamma\int_0^z t^{\gamma+\eta-1}f^{\eta+1}(t)dt$$
$$N(z)=\int_0^z t^{\gamma+\eta-1}g(t)dt$$

则 $M(z)$ 和 $N(z)$ 都是 D 内的解析函数，且 $M(0)=N(0)=0$.用定理 2.2.10 的证法

可以证明 $N(z)$ 将 D 映照成关于原点成星形区域，此外，由 $M(z)$ 和 $N(z)$ 的定义

$$\frac{M'(z)}{N'(z)}=\eta+\frac{zf'(z)}{g(z)}$$

再由 $C(A,B)$ 的定义可知

$$\frac{M'(z)}{N'(z)}=\eta+\frac{1+Az}{1+Bz}=(\eta+1)\frac{1+\frac{A+\eta B}{1+\eta}z}{1+Bz},z\in D$$

由引理 2.2.1，可得

$$\frac{M(z)}{N(z)}\prec(\eta+1)\frac{1+\frac{A+\eta B}{1+\eta}z}{1+Bz},z\in D$$

或

$$\frac{zF'(z)}{G(z)}\prec\frac{1+\frac{A+\eta B}{1+\eta}z}{1+Bz},z\in D,$$

故 $F(z)\in C(\frac{A+\eta B}{1+\eta},B)$. 证毕.

定理 2.3.6 若 $f(z)\in S$，令

$$F(z)=\frac{1}{2}[f+zf'(z)]$$

则 $F(z)$ 在 $|z|<\frac{1}{2}=\rho_0$ 内时近于凸函数，即 $\frac{1}{\rho_0}f(\rho_0 z)$ 在 D 中是近于凸函数，且 $\rho_0=\frac{1}{2}$ 不能再大.

证 由已知条件知，$\exists g(z)\in S^*$，使得 $\frac{zf'(z)}{g(z)}\in P$.

令 $G(z)=\frac{1}{2}[g(z)+zg'(z)]$，则由定理 2.2.10 得 $2G(\frac{1}{2}z)\in S^*$，即 $G(z)\in S^*(|z|<\frac{1}{2})$，

下面证明 $|z|<\frac{1}{2}$ 内 $\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{G(z)}>0$：

因为

$$\frac{zf'(z)}{g(z)}=\frac{zF(z)-\int_0^z F(t)dt}{\int_0^z G(t)dt}=\mu(z)\cdot \tag{2.3.11}$$

其中 $\mu(z)\in P$，从（2.3.11）式，得到

$$zF'(z)=\mu(z)G(z)+\mu'(z)\int_0^z G(t)dt\,. \tag{2.3.12}$$

由此推出

$$\frac{zF'(z)}{G(z)}=\mu(z)+\mu'(z)\frac{\int_0^z G(t)dt}{G(z)}\ , \tag{2.3.13}$$

因为

$$\frac{zG(z)}{\int_0^z G(t)dt}=1+\frac{zg'(z)}{g(z)},g\in S^*$$

存在 D 内的解析函数 $\varphi(z),\varphi(0)=0,|\varphi(z)|<1$，使得

$$\frac{zG(z)}{\int_0^z G(t)dt}=\frac{2}{1+\varphi(z)}$$

从而

$$\frac{\int_0^z G(t)dt}{G(z)}=\frac{z(1+\varphi(z))}{2}$$

由此，得

$$\left|\frac{\int_0^z G(t)dt}{G(z)}\right|\le\frac{1}{2}(|z|+|z|^2)\cdot \tag{2.3.14}$$

再由 $\mu(z)\in P$ 知，存在 D 内的解析函数 $\varphi(z),\varphi(0)=0,|\varphi(z)|<1$，使得 $\mu(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}$，再利用定理 1.6.11 知

$$|\mu'(z)|=\left|\frac{2w'(z)}{(1+w(z))^2}\right|\le 2\frac{1}{1-|z|^2}\cdot\frac{1-|w(z)|^2}{|1+w(z)|^2}$$

$$=\frac{1}{1-|z|^2}2\operatorname{Re}\mu(z)\cdot \tag{2.3.15}$$

从（2.3.13）、（2.3.14）、（2.3.15）式可得

$$\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{G(z)}\ge\operatorname{Re}\mu(z)-|\mu'(z)|\cdot\left|\frac{\int_0^z G(t)dt}{G(t)}\right|$$

$$\ge\operatorname{Re}\mu(z)-\frac{z}{1-|z|^2}[\operatorname{Re}\mu(z)][\frac{1}{2}(|z|+|z|^2)]$$

$$=[\operatorname{Re}\mu(z)][1-\frac{|z|+|z|^2}{1-|z|^2}]$$

$$=[\operatorname{Re}\mu(z)](\frac{1-2|z|}{1-|z|})$$

但 $\operatorname{Re}\mu(z)>0$，故只要 $|z|<\frac{1}{2}$ 时，$\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{G(z)}>0$，即 $F(z)$ 在 $|z|<\frac{1}{2}=\rho_0$ 内是近于凸函数.取 $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ 时 $F(z)=\frac{1}{2}(f(z)+f'(z))=\frac{z}{(1-z)^3}$，此时 $F'(z)=\frac{1+2z}{(1-z)^4}$，当 $z=-\frac{1}{2}$ 时，$F'(z)=0$，因此 $\rho_0=\frac{1}{2}$ 不能再大. 证毕.

2. Bazilevic 函数

定义 2.3.3 设$\alpha>0, f\in S$，若存在函数$g(z)\in S^*(A,B)$，使得

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}, z\in D$$

其中 $-1\le B<A\le 1$，则称 $f(z)\in B_{\alpha}(A,B)$．$B_{\alpha}(1,-1)$ 为 Bazilevic 函数类. $B_{\alpha}(A,B)\subseteq B_{\alpha}(1,-1)=B_{\alpha}$.

定理 2.3.7 设$\alpha>0,\gamma$为满足$\mathrm{Re}\{\gamma\}\ge-\alpha\frac{1-A}{1-B}$的复常数.若$f(z)\in B_{\alpha}(A,B)$，则积分算子

$$F(z)=\{\frac{\gamma+\alpha}{z^{\gamma}}\int_0^z t^{\gamma-1}f^{\alpha}(t)dt\}^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.3.16}$$

定义的函数$F(z)\in B_{\alpha}(A,B)$.

证 设$f(z)\in B_{\alpha}(A,B)$，由定义$\exists g(z)\in S^*(A,B)$，使得

$$\frac{zf^{\alpha-1}(z)f'(z)}{g^{\alpha}(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}, z\in D. \tag{2.3.17}$$

令

$$F_1(z)=\{\frac{\gamma+\alpha}{z^{\gamma}}\int_0^z t^{\gamma-1}g^{\alpha}(t)dt\}^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.3.18}$$

由$\mathrm{Re}\gamma>-\alpha\frac{1-A}{1-B}$ 及定理 2.2.10 可得$F_1(z)\in S^*(A,B)$

由（2.3.17）和（2.3.18）两式，可得

$$\alpha\frac{zF^{\alpha-1}(z)F'(z)}{F_1^{\alpha}(z)}=\frac{z^{\gamma}f^{\alpha}(z)-\gamma\int_0^z t^{\gamma-1}f^{\alpha}(t)dt}{\int_0^z t^{\gamma-1}g^{\alpha}(t)dt}, \tag{2.3.19}$$

上式中,命

$$M(z)=z^{\gamma}f^{\alpha}(z)-\gamma\int_0^z t^{\gamma-1}f^{\alpha}(t)dt, N(z)=\int_0^z t^{\gamma-1}g^{\alpha}(t)dt,$$

则$M(z)$和$N(z)$都是 D 内的解析函数，且$M(0)=N(0)=0$. 用定理 2.2.10 的方法

容易证明$N(z)$将D映照成关于原点成星形区域，此外，由$M(z)$和$N(z)$的定义

$$\frac{M'(z)}{N'(z)}=\alpha\frac{zf^{\alpha}(z)f'(z)}{g^{\alpha}(z)}. \tag{2.3.20}$$

再由（2.3.17），得到

$$\frac{M'(z)}{N'(z)}\prec\alpha\frac{1+Az}{1+Bz},z\in D$$

由引理2.2.1，可得

$$\frac{M(z)}{N(z)}\prec\alpha\frac{1+Az}{1+Bz},z\in D,$$

由此推出

$$\frac{\alpha F^{\alpha-1}(z)F'(z)}{F_1^{\alpha}(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz},z\in D$$

故$F(z)\in B_{\alpha}(A,B)$. 证毕.

§2.4 函数类$P_{\lambda,k}(A,B)$

本节中将通过讨论函数类$P_{\lambda,k}(A,B)$的性质介绍常用的研究方法.

定义 2.4.1 设$-1\le B<A\le,-1\le B<0,0\le\lambda<\frac{A-B}{1-B}\le 1$，用$P_{\lambda,k}(A,B)$表示在D内解析，且满足条件

$$(1-\lambda z)f'(z)\prec\frac{1+Az}{1+Bz}. \tag{2.4.1}$$

的函数$f(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n(k\ge 2)$的类，其中$\{a_n\}$满足

$$\frac{n|a_n|}{(n-1)|a_{n-1}|}\ge\lambda,(n\ge k+1)..$$

由定义2.4.1，$f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$当且仅当存在D中的解析函数$w(z)$并且对于$z\in D$满足$w(0)=0,|w(z)|<1$，使得

$$(1-\lambda z)f'(z)=\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)},z\in D \tag{2.4.2}$$

显然由（2.4.2）式有 $\operatorname{Re}\{(1-\lambda z)f'(z)\}>0$，并且 $P_{\lambda,k}(A,B)$ 中的函数在 D 中是单叶的.

从（2.4.2）式解出 $w(z)$，并利用 $|w(z)|<1$，得到

$$\left|\frac{(1-\lambda z)f'(z)-1}{A-B(1-\lambda z)f'(z)}\right|<1 \tag{2.4.3}$$

下面研究函数类 $P_{\lambda,k}(A,B)$，并且得到系数估计、偏差定理，以及 $P_{\lambda,k}(A,B)$ 类的凸半径，对于函数类 $P_{\lambda,k}(A,B)$ 如果补充条件 $(1-\frac{1}{n+c})\frac{n|a_n|}{(n-1)|a_{n-1}|}\geq\lambda$，我们还得到形如

$$F(z)=\frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f(t)dt,c>-1 \tag{2.4.4}$$

的保持积分算子的类仍属于 $P_{\lambda,k}(A,B)$.反过来，当 $F(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$ 时，我们可以得到（2.4.4）中的 $f(z)$ 的单叶半径.

1. 系数估计

定理 2.4.1 设 $\frac{n|a_n|}{(n-1)|a_{n-1}|}\geq\lambda$，则 $f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$ 当且仅当

$$\sum_{n=k}^{\infty}n(1-\lambda)(1-B)|a_n|\leq(A-B)-\lambda(1-B)$$

证 先证充分性. 令 $|z|=1$，则

$$|(1-\lambda z)f'(z)-1|-|A-B(1-\lambda z)f'(z)|$$
$$=|-(\lambda z+k|a_k|z^{k-1}-\sum_{n=k+1}^{\infty}(n|a_n|-\lambda(n-1)|a_{n-1}|)z^{n-1}|-$$

$$|(A-B)+B[\lambda z+k|a_k|z^{k-1}+\sum_{n=k+1}^{\infty}(n|a_n|-\lambda(n-1)|a_{n-1}|)z^{n-1}|$$

$$\le \lambda + k|a_k| + \sum_{n=k+1}^{\infty}(n|a_n| - \lambda(n-1)|a_{n-1}|) -$$

$$\{(A-B) - |B|[\lambda + k|a_k| + \sum_{n=k+1}^{\infty}(n|a_n| - \lambda(n-1)|a_{n-1}|)]\}$$

$$\le \lambda + \sum_{n=k}^{\infty} n(1-\lambda)|a_n| - \{(A-B) + \lambda B + B\sum_{n=k}^{\infty} n(1-\lambda)|a_n|\}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} n(1-\lambda)(1-B)|a_n| - [(A-B) - \lambda(1-B)]$$

于是由最大模原理（引理 1.1.1）知，$f(z) \in P_{\lambda,k}(A,B)$..

其次，证明必要性.令

$$\left|\frac{(1-\lambda z)f'(z)-1}{A-B(1-\lambda z)f'(z)}\right|$$

$$= \left|\frac{-(\lambda z + k|a_k|z^{k-1} - \sum_{n=k+1}^{\infty}(n|a_n| - \lambda(n-1)|a_{n-1}|)z^{n-1}}{(A-B) + B[\lambda z + k|a_k|z^{k-1} + \sum_{n=k+1}^{\infty}(n|a_n| - \lambda(n-1)|a_{n-1}|)z^{n-1}}\right| < 1$$

因为$|\operatorname{Re} z| \le |z|$，对所有的 z 成立.所以我们有

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\lambda z + k|a_k|z^{k-1} + \sum_{n=k+1}^{\infty}(n|a_n| - \lambda(n-1)|a_{n-1}|)z^{n-1}}{(A-B) + B[\lambda z + k|a_k|z^{k-1} + \sum_{n=k+1}^{\infty}(n|a_n| - \lambda(n-1)|a_{n-1}|)z^{n-1}]}\right\} < 1$$

在实轴上选取 z 的值，使得 $f'(z)$ 取实值，在这个最后的不等式中消去分母并且通过实值令 $z \to 1$，就得到

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(1-\lambda)(1-B)|a_n| \le (A-B) - \lambda(1-B).$$

如果取函数

$$f(z) = z - \sum_{n=k}^{\infty}\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{n(1-B)}\lambda^{n-k}z^n, k \ge 2$$

就能达到准确值，因为

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(1-\lambda)(1-B)\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{n(1-B)}\lambda^{n-k}=$$

$$(1-\lambda)[(A-B)-\lambda(1-B)]\sum_{n=k}^{\infty}\lambda^{n-k}=(A-B)-\lambda(1-B).$$

证毕.

下面要讨论 $P_{\lambda,k}(A,B)$ 类的包含关系

定理 2.4.2 设 $0\le\lambda_1<\lambda_2<1$，则 $P_{\lambda_2,k}(A,B)\subset P_{\lambda_1,k}(A,B)$.

证 设 $f(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n$，且 $\frac{n|a_n|}{(n-1)|a_{n-1}|}\ge\lambda$，由定理（2.4.1），函数 $f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$ 当且仅当 $\sum_{n=k}^{\infty} n|a_n|\le\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{(1-\lambda)(1-B)}$.

为证明 $P_{\lambda_2,k}(A,B)$ 是 $P_{\lambda_1,k}(A,B)$ 的子类，我们只需证明

$$\frac{(A-B)-\lambda_2(1-B)}{(1-\lambda_2)(1-B)}\le\frac{(A-B)-\lambda_1(1-B)}{(1-\lambda_1)(1-B)} \tag{2.4.5}$$

即可.因为不等式 $\frac{A-B}{1-B}\le 1$ 成立.于是从不等式 $A-B\le 1-B$ 两边同时乘 $(\lambda_2-\lambda_1)$，然后两步同时加 $(A-B)+\lambda_1\lambda_2(1-B)$，整理后我们得到与（2.4.5）等价的不等式

$$(1-\lambda_1)[(A-B)-\lambda_2(1-B)]\le(1-\lambda_2)[(A-B)-\lambda_1(1-B)]$$

所以 $P_{\lambda_2,k}(A,B)\subset P_{\lambda_1,k}(A,B)$.证毕.

2. 偏差定理

定理 2.4.3 若 $f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$，则对于 $|z|=r$，有

$$r-\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{k(1-\lambda)(1-B)}r^k\le|f(z)|\le r+\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{k(1-\lambda)(1-B)}r^k. \tag{2.4.6}$$

$$1-\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{(1-\lambda)(1-B)}r^{k-1}\le|f'(z)|\le r+\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{(1-\lambda)(1-B)}r^{k-1}. \quad (2.4.7)$$

证 令 $f(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n$，$n|a_n|\ge\lambda(n-1)|a_{n-1}|(n\ge k+1)$,则由定理 2.4.1，

$$\sum_{n=k}^{\infty}n|a_n|\le\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{(1-\lambda)(1-B)}$$

因此

$$|f(z)|\le r+\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|r^n\le r+r^k\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|\le r+\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{k(1-\lambda)(1-B)}r^k;$$

$$|f(z)|\ge r-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|r^n\le r-r^k\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|\le r-\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{k(1-\lambda)(1-B)}r^k. \quad (2.4.8)$$

于是（2.4.6）成立.此外

$$|f'(z)|\le 1+\sum_{n=k}^{\infty}n|a_n|r^{n-1}\le 1+r^{k-1}\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|. \quad (2.4.9)$$

又由定理 2.4.1，有

$$\sum_{n=k}^{\infty}n|a_n|\le\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{(1-\lambda)(1-B)}$$

把上式代入到（2.4.8）和（2.4.9）中，而得不等式（2.4.7）.

如果取函数 $f(z)=z-\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{k(1-\lambda)(1-B)}z^k, k\ge 2$ 就能达到准确值.

3. 积分算子

定理 2.4.4 设 c 是实数且 $c>-1$，$f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$，且 $(1-\frac{1}{c+n})\frac{n|a_n|}{(n-1)|a_{n-1}|}\ge\lambda$，则用（2.4.4）式定义的函数 $F(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$.

证 设 $f(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n$，则由 $F(z)$ 的表达式，得到 $F(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|b_n|z^n$，

其中$b_n=\frac{c+1}{c+n}|a_n|$. 因为$f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$，所以

$$\sum_{n=k}^{\infty}n(1-\lambda)(1-B)|b_n|=\sum_{n=k}^{\infty}n(1-\lambda)(1-B)\frac{c+1}{c+n}|a_n|$$

$$\leq\sum_{n=k}^{\infty}n(1-\lambda)(1-B)|a_n|\leq(A-B)-\lambda(1-B)$$

且$\frac{n|b_n|}{(n-1)|b_{n-1}|}=(1-\frac{1}{c+n})\frac{n|a_n|}{(n-1)|a_{n-1}|}\geq\lambda$.因此由定理2.4.1， $F(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$. 证毕.

定理2.4.5 设c是实数且$c>-1$，又设$F(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$，则由（2.4.4）式定义的函数$f(z)$在$|z|<R^*$中是单叶的，其中

$$R^*=\inf_{n\geq k}\{\frac{c+1}{c+n}\cdot\frac{(1-\lambda)(1-B)}{(A-B)-\lambda(1-B)}\}^{\frac{1}{n-1}}.$$

证 设$F(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n$，则由（2.4.7）式得到

$$f(z)=z^{1-c}[z^cF(z)]'/(c+1)=z-\sum_{n=k}^{\infty}\frac{c+n}{c+1}|a_n|z^n$$

为证明$f(z)$在$|z|<R^*$中单叶，只需证明在$|z|<R^*$中有，$|f'(z)-1|<1$即可.因为

$$|f'(z)-1|=|-\sum_{n=k}^{\infty}c(\frac{c+n}{c+1})|a_n|z^{n-1}|\leq\sum_{n=k}^{\infty}c(\frac{c+n}{c+1})|a_n||z|^{n-1}$$

如果

$$\sum_{n=k}^{\infty}n(\frac{c+n}{c+1})|a_n||z|^{n-1}<1 \quad (2.4.10)$$

则有$|f'(z)-1|<1$. 而由定理2.4.1，得

$$\sum_{n=k}^{\infty}n\frac{(1-\lambda)(1-B)}{(A-B)-\lambda(1-B)}|a_n|\leq 1.$$

因此，如果

$$n(\frac{c+n}{c+1})|a_n||z|^{n-1}<\frac{n(1-\lambda)(1-B)}{(A-B)-\lambda(1-B)}|a_n|, n\geq k$$

或者

$$|z|<\{\frac{c+1}{c+n}\cdot\frac{(1-\lambda)(1-B)}{(A-B)-\lambda(1-B)}\}^{\frac{1}{n-1}}, n\geq k.$$

（2.4.10）就将满足，所以 $f(z)$ 在 $|z|<R^*$ 中单叶.

如果取函数

$$F(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{n(1-B)}\lambda^{n-k}z^k, k\geq 2$$

就能达到准确值. 证毕.

4. 凸半径

定理 2.4.6 设 $f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$，则 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 中是凸的，其中

$$R=\inf_{n\geq k}\{\frac{(1-\lambda)(1-B)}{n[(A-B)-\lambda(1-B)]}\}^{\frac{1}{n-1}}$$

证 为了证明 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 中是凸的，只需证明在 $|z|<R$ 中 $|zf''(z)/f'(z)|<1$ 即可. 令 $f(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n$，则有

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|=\left|\frac{-\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)|a_n|z^{n-1}}{1-\sum_{n=k}^{\infty}n|a_n|z^{n-1}}\right|\leq\frac{\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=k}^{\infty}n|a_n||z|^{n-1}}$$

如果

$$\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)|a_n||z|^{n-1}<1-\sum_{n=k}^{\infty}n|a_n||z|^{n-1}$$

或者

$$\sum_{n=k}^{\infty}n^2|a_n||z|^{n-1}<1 \qquad (2.4.11)$$

则有 $|zf''(z)/f'(z)|<1$.

同样由定理 2.4.1，我们有

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n(1-\lambda)(1-B)}{(A-B)-\lambda(1-B)}|a_n|\le 1.$$

因此，如果

$$|n^2|a_n||z|^{n-1}<\frac{n(1-\lambda)(1-B)}{(A-B)-\lambda(1-B)}|a_n|, n\ge k, k\in N$$

或者

$$|z|<\{\frac{(1-\lambda)(1-B)}{n[(A-B)-\lambda(1-B)]}\}^{\frac{1}{n-1}}, n\ge k$$

（2.4.11）式将满足，所以 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 中是凸函数.

如果取函数

$$f(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{n(1-B)}\lambda^{n-k}z^k, k\ge 2$$

就能达到准确值. 证毕.

5. 卷积性质

设 $f(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_n|z^n$ 和 $g(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|b_n|z^n$ 在 D 内解析，定义

函数 f 和 g 的 *Hadamard* 卷积 $(f*g)(z)$： $(f*g)(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}|a_nb_n|z^n$;

函数 f 和 g 的拟 *Hadamard* 卷积 $(f**g)_\lambda(z)$： $(f**g)_\lambda(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n}{\lambda}|a_nb_n|z^n, (\lambda>0)$.

定理 2.4.7 设 $f(z), g(z)\in P_{\lambda,k}(A,B), \lambda>0, n\ge k\ge 2, -1\le B<0$，且

$$\frac{n|a_n|}{(n-1)|a_{n-1}|}\ge\lambda, \quad \frac{n|b_n|}{(n-1)|b_{n-1}|}\ge\lambda,$$

则

$$(f**g)_\lambda(z)\in P_{\lambda,k}(A,B).$$

证 因 $f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$，由定理 2.4.1 得

$$|a_n| \le \frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{n(1-\lambda)(1-B)}, n \ge k$$

从而

$$|a_n| \le \frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{n(1-\lambda)(1-B)} = \frac{\frac{A-B}{1-B}-\lambda}{n(1-\lambda)} \le \frac{1}{n},\ n \ge k$$

同理 若 $g(z) \in P_{\lambda,k}(A,B)$，由定理 2.4.1，得到

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^2(1-\lambda)(1-B)|a_n b_n| \le \sum_{n=k}^{\infty} n(1-\lambda)(1-B)|b_n| \le (A-B)-\lambda(1-B)$$

且

$$\frac{n \cdot n|a_n||b_n|}{(n-1)\lambda\left||a_{n-1}|\right||b_{n-1}|} = \frac{n|a_n|}{(n-1)|a_{n-1}|} \cdot \frac{n|b_n|}{\lambda(n-1)|b_{n-1}|}(n-1) \ge (n-1)\lambda > \lambda$$

利用定理 2.4.1 得到 $(f**g)_\lambda(z) \in P_{\lambda,k}(A,B)$．证毕.

定理 2.4.8 设 $f_j(z) = z - \sum_{n=k}^{\infty} |a_{n_j}| z^n \in P_{\lambda,k}(A,B), \frac{n|a_{n_j}|}{(n-1)|a_{n_j-1}|} \ge \lambda, j=1,2,\cdots,m$，

若 $f_j(z) \in P_{\lambda,k}(A,B)$，则

$$g(z) = z - \sum_{n=k}^{\infty} |b_n| z^n \in P_{\lambda,k}(A,B), b_n = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{n_j}.$$

证 设 $f_j(z) = z - \sum_{n=k}^{\infty} |a_{n_j}| z^n \in P_{\lambda,k}(A,B)$, 由定理 2.4.1 得到

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(1-\lambda)(1-B)|a_{n_j}| \le (A-B)-\lambda(1-B), j=1,2,\cdots,m.$$

于是

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(1-\lambda)(1-B)|b_n| \le \sum_{n=k}^{\infty} [n(1-\lambda)(1-B)(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|a_{n_j}|)] \le (A-B)-\lambda(1-B).$$

且

$$\frac{n|b_n|}{(n-1)|b_{n-1}|} = \frac{n \cdot \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|a_{n_j}|}{(n-1) \cdot \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|a_{n_j-1}|} \ge \lambda$$

故 $g(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$. 证毕.

定理 2.4.9 设 $f_1(z)=z, f_n(z)=z-\dfrac{(A-B)-\lambda(1-B)}{n(1-\lambda)(1-B)}z^n, n\geq k$，且 $\dfrac{n|a_n|}{(n-1)|a_{n-1}|}\geq\lambda$，则 $f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$ 当且仅当

$$f(z)=l_1f_1(z)+\sum_{n=k}^{\infty}l_nf_n(z),$$

其中 $l_n\geq 0, l_1+\sum_{n=k}^{\infty}l_n=1$.

证 设

$$f(z)=l_1f_1(z)+\sum_{n=k}^{\infty}l_nf_n(z)=z-\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{n(1-B)}l_nz^n,$$

则

$$\sum_{n=k}^{\infty}[n(1-\lambda)(1-B)\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{n(1-\lambda)(1-B)}l_n]=\sum_{n=k}^{\infty}[(A-B)-\lambda(1-B)]\lambda_n$$

$$=[(A-B)-\lambda(1-B)]\sum_{n=k}^{\infty}\lambda_n \quad\leq (A-B)-\lambda(1-B).$$

于是 $f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$.

另一方面，设 $f(z)\in P_{\lambda,k}(A,B)$，且 $\dfrac{n|a_n|}{(n-1)|a_{n-1}|}\geq\lambda$，由定理 2.4.1，有

$$|a_n|\leq\frac{(A-B)-\lambda(1-B)}{n(1-\lambda)(1-B)}, n\geq k, k\in N.$$

令 $l_n=\dfrac{n(1-\lambda)(1-B)}{A-B)-\lambda(1-B)}|a_n|, n\geq k$ 和 $l_1=1-\sum_{n=k}^{\infty}l_n$，有

$$f(z)=l_1f_1(z)+\sum_{n=k}^{\infty}l_nf_n(z).$$

证毕.

用从属关系构造很多函数类，除了前几节介绍的特殊函数类以外，还有很多诸如，关于共轭点的 α—近于凸象函数，Robertson 函数，预星象函数等函数类. 我们将在第三，第四章中分别进行研究. 用其它方法还可以定义一些特殊函数类，这里不讨论.

问 题

1. 若 $p(z)\in P(A,B)$，则对任意的 $\lambda\in R$，估计 $\left|p_2-\lambda p_1^2\right|$ 的准确界，并进一步讨论 $\left|p_k-\lambda p_{k-1}^2\right|$ 的准确界.

2. 若 $p_i(z)\in P(A_i,B_i)(i=1,2)$，则下列从属关系是否成立？

$$\forall\alpha\in R,\quad (1-\alpha)p_1(z)+\alpha p_2(z)\prec(1-\alpha)\frac{1+A_1z}{1+B_1z}+\alpha\frac{1+A_2z}{1+B_2z}\prec B(z).$$

3. 若 $p_i(z)\in P(A_i,B_i)(i=1,2)$，则是否 $p_1(z)p_2(z)\prec\frac{1+Az}{1+Bz}$ 成立？若成立给出其成立的条件.

4. 若对函数 $p_i(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_{i,n}z^n\in P(A,B),\ i=1,2,\cdots,n.$ 定义运算

$$p_1(z)*p_2(z)*\cdots*p_n(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}p_{i,n}\right)z^n.$$

则 讨论 $p_1(z)*p_2(z)*\cdots*p_n(z)\in P(A,B)$ 的条件.

5. 设函数类 $V(\beta)=\left\{f(z)\in A:\mathrm{Re}\frac{f(z)}{z}>\beta,0\le\beta<1,z\in D\right\}$，讨论函数类 $V(\beta)$ 的最大增长指数，积分算子，凸组合等性质.

6. 设 $0\le\alpha<1,0\le\beta<1,\ f(z)\in S$，若 $\exists g(z)\in S^*(\alpha),h(z)\in K(\beta)$，使得

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{g(z)h(z)}>\rho\,(0\le\rho<1)$$

则称 $f(z)\in LS(\alpha,\beta;\rho;g(z),h(z))$，讨论该类的性质.

6. 讨论 $\alpha-$凸函数与 Bazilevic 函数类的关系.

7. 设 $f_i(z)\in S^*(\beta_i)(0\le\beta_i<1,i\in N)$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$. 讨论有函数 $\prod_{i=1}^{n}f_i(z)$ 和 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(z)$ 构成的函数类 $\Pi S_{i=1}^{n}(\beta_i)$ 和 $\Sigma S_{i=1}^{n}(\lambda_i,\beta_i)$ 的性质.

8. 设$f(z)\in S,\forall a,b\in D,a\neq b$,则分别讨论，当$f(z)\in S^{*},f(z)\in K$和$f(z)\in B$时,讨论$\left|f^{(n)}(a)/f^{(n)}(b)\right|$的上界.

9. 若$f(z)\in S^{*},f(z)\neq\eta,\mu$, 则求$\left|\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\mu}\right|$的上界

10. 若$f(z)\in S$是n次多项式,则$|a_n|\le 1/n$.

第三章 特殊解析函数的研究

§ 3.1 算子理论及相关结果

算子理论是研究解析函数的重要工具，本章主要讨论用算子刻画的解析函数性质，为此作为基础罗列出线性算子的某些基本性质，并给出一般拓扑向量空间上紧凸集的 $Kyein-Milman$ 定理. 其中多数结果在《泛函分析》和《拓扑学》基础教程中可以找到, 这里不予证明.

1. 线性空间、线性算子

定义 3.1.1 （线性空间）设 X 是一个非空集合，E 是实数域（或复数域），若定义 X 中两元素之间的加法运算以及数与 X 中元素之间的数乘运算，即

加法运算 $x+y$ 是 $X\times X\to X$ 的映射：$\forall(x,y)\in X\times X,\exists x+y\in X$；

乘法运算 $\alpha\cdot x$ 是 $X\times X\to X$ 的映射：$\forall(\alpha,y)\in E\times X,\exists\alpha\cdot x\in X$.

并且满足下列条件

设 $x,y,z,\theta\in X,\alpha,\beta\in E.$

（1）交换律 $x+y=y+x;$

（2）结合律 $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x;$

（3）零元素 $\exists\theta\in X,\forall x\in X,x+\theta=x;$

（4）逆元素 $\forall x\in X,\exists -x,x+(-x)=\theta;$

（5）单位元 $1x=x;$

（6）分配律 $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\alpha(x+y)=\alpha x+\beta x.$

称 X 为 E 上的线性空间.

定义 3.1.2 （凸集） 设 X 为线性空间， $A\subset X$ ，若对 $\forall x,y\in A,\lambda\in[0,1]$,有

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in A. \tag{3.1.1}$$

则称 A 为凸集.

显然，线性空间的每一个线性子空间都是凸集.

凸集有下列简单性质：

（1） 若 A_1 和 A_2 是线性空间 X 中的凸集，则对 $\alpha,\beta\in E$,有

$$\alpha A_1+\beta A_2=\{\alpha x+\beta y: x\in A_1, y\in A_2\}$$

也是凸集.

（2）若 $A_i\,(i\in N)$ 是线性空间 X 中的凸集，且 $\bigcap_{i\in N}A_i\neq\phi$, 则 $\bigcap_{i\in N}A_i$ 也是凸集.

（3）A 是线性空间 X 的子集，则所有包含 A 的凸集的交

$$\bigcap\{M: M是X中的凸集, A\subset M\}. \tag{3.1.2}$$

是 X 中包含 A 的最小凸集.

定义 3.1.3（凸包） 满足（3）的点集（3.1.2）称为 A 的凸包. 记为 coA.

我们还用 $\overline{coA}$ 来表示 A 的闭凸包.

定理 3.1.1 A 为凸集当且仅当 若 $x_i\in A, t_i\in[0,1], i=1,2,\cdots,n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}t_i=1, \sum_{i=1}^{n}t_ix_i\in A\cdot$$

定义 3.1.4 (端点) 设 K 是向量空间 X 的凸子集, 若任意包含点 $p\in K$ 的开线段都不包含于 K 中, 则称 p 为 K 的端点. 用 $extK$ 表示端点集全体.

定义 3.1.5 设 X,Y 是两个线性空间，映射 $T{:}X\to Y$ 若满足条件 $\forall x,y\in X,\forall\alpha,\beta\in E$,有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty\in Y. \tag{3.1.3}$$

则称 T 为 X 上的线性算子，当 $Y=E$ 时，线性算子 T 称为线性泛函， $E=R$ （或 $E=C$ ）时，称实线性泛函（或复线性泛函）.

定义 3.1.6 设 X,Y 是两个线性空间，若存在一个线性映射 $T: X\to Y$ 是一一

映射，则称 X,Y 互为同构，映射 T 称为 X 到 Y 的线性同胚.

定义 3.1.7 设 X 是数域E上的线性空间. 函数 $\|\cdot\|: X \to [0,+\infty)$ 称为 X 上定义的一个范数，如果满足条件：

（1）$\|x\| > 0$ 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

（2）$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

（3）$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

则称 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，也可以简记为 X.

注 在 X 是赋范线性空间时，由范数导出的度量为 $\rho(x,y) = \|x-y\|$. 此时 X 在此度量意义下成为度量空间. 赋范线性空间中，可以用描述序列的收敛性和 Cauchy 序列的概念.

设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 中的序列：

（1）若存在 $x \in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$, 则称 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x；

（2）若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$（正整数），使得对 $\forall m,n > N$ 有 $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列.

定义 3.1.8（致密集） 若 X 度量空间，$A \subset X$, 若 A 中的任何点列必在 X 中收敛的子点列，则称 A 是 X 中的致密集.

定义 3.1.9（紧集） 度量空间中的致密闭集称为紧集.

定义 3.1.10 若赋范线性空间 X 在范数导出的度量下是完备的度量空间，则称 X 为 Banach 空间. 简言之，Banach 空间是完备的赋范线性空间.

有限维的赋范线性空间的性质：

（1）赋范线性空间 X 的每一个有限维的子空间 Y 是完备的；

（2）在有限维线性空间中，任何两个范数都是等价的；

（3）Y 是有限维的赋范线性空间 X 的子集，则 Y 是紧集的充要条件为 Y 有界闭集；

定义 3.1.11 设 X,Y 是两个赋范线性空间，$T: X \to Y$ 是线性算子. 若 T 将 X 中

有界集映成Y中有界集，则称T是有界. 若$x_n \to x$，则$Tx_n \to Tx$，称T在x点连续；T在X中的每一点连续，则称称T在X上连续. 对于线性算子，连续性与有界性是两个等价的概念.

线性算子的性质：

(1) 线性算子$T:X \to Y$连续的充要条件是T有界.

(2) 设X,Y是两个 Banach 空间，$T:X \to Y$是一一映射，$TX=Y$，$T\in L(X,Y)$，则T的逆算子$T^{-1}:Y \to X$也是有界线性算子，即$T^{-1}\in L(Y,X)$.

2. *Krein-Milman* 定理

定义 3.4.12（拓扑空间） 设T是集合X的某些子集组成的一个类，使得满足下面的两个条件：

（1）属于T中的集合的任何有限交集属于T；

（2）属于T中的集合的任意并集属于T；

则称T为X上的一个拓扑，(X,T)叫做一个拓扑空间. T的每个元素叫做(X,T)的开集，X的每个元素称为(X,T)的一个点，X的每个子集都叫拓扑空间(X,T)的一个点.

度量空间和拓扑空间可以互相转化.

定理 3.1.2 设X是拓扑向量空间，A为X的凸子集，A 的开集记为$\operatorname{int} A$. 则

（1）$\overline{A}$为凸集；（2）若$a\in \operatorname{int} A, b\in \overline{A} \Rightarrow [a,b) \subset \operatorname{int} A$.

定理 3.1.3 如果A是向量空间X的凸子集且$a\in A$，则$a\in extA \Leftrightarrow A/\{a\}$为凸集.

定理 3.1.4（*Krein-Milman* **定理**）若A是拓扑向量空间X的非空紧凸子集，则$extA \neq \phi, A=\overline{co}(extA)$.

证 由定理 3.1.3 可知，$a\in extA \Leftrightarrow A/\{a\}$为凸子集，我们要找$A$的最大凸的开真子集. 设 B 表示 A 的所有凸的开真子集. 由于X是拓扑向量空间，$\mathrm{A}\neq\phi$，

所以$\mathrm{B}\neq\phi$. 设B_0是B中的一个链，令$\mathrm{U}_0=\{U:U\in B_0\}$，显然$\mathrm{U}_0$为开凸，$\mathrm{U}_0\in B$.

根据Zorn引理，B有最大元.

若$x\in A,\lambda\in[0,1],T_{x,\lambda}:A\to A,T_{x,\lambda}(y)=\lambda y+(1-\lambda)x$. 容易验证 $T_{x,\lambda}$为$A\to A$的仿射映射，且$T_{x,\lambda}(U)\subset U,T_{x,\lambda}^{-1}(U)$是A的凸的开真子集. 如果$y\in(\bar{U}-U)$,由$U$的最大性和定理3.1.3可知

$$T_{x,\lambda}(A)\subset U,x\in U. \tag{3.1.4}$$

于是我们得到：

A的任意开凸子集与U的交和并或等于U，或等于A. 从而利用定理3.1.3，容易证明$A-U$为单点集. 还得到

若V是X的开凸子集，$extA\subset V\Rightarrow A\subset V$. 这时，我们有

设$E=\overline{co}(extA)$，若$x^*\in X^*,\alpha\in R,E\subset\{x\in X:\mathrm{Re}\,x^*(x)<\alpha\}=V$, 由隔离性定理即得$E=A$.. 证毕.

还给出

定理3.1.5 若A是拓扑向量空间X的非空紧凸子集，且$B\subset A$，$A=\overline{coB}$，则$extA\subset\bar{B}$.

§3.2 用D^λ算子定义的解析函数类$A(\lambda,\alpha,\beta)$.

本节中引进用D^λ算子刻画的有关星象函数的解析函数类$A(\lambda,\alpha,\beta)$. 导出$A(\lambda,\alpha,\beta)$中函数的积分表达式，借助算子理论研究$A(\lambda,\alpha,\beta)$的包含关系并确定它的闭凸包，闭凸包的极值点和它的支撑点，利用一阶微分从属关系证明关于实部的一个不等式，得到一个偏差定理.

设A表示在单位圆盘$D=\{z:|z|<1\}$内解析函数$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$的全体.用$\mathrm{S}^*(\alpha),\mathrm{K}(\alpha),\mathrm{C}(\alpha)(\alpha<1)$分别表示在D内的$\alpha$级星象函数$\alpha$级凸象函数和$\alpha$级

近于凸函数，函数 $f(z)\in A$ 满足条件

$$\frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}*f(z)\in S^*(\alpha). \tag{3.2.1}$$

符号 $*$ 表示 *Hadamord* 卷积. 则称 $f(z)$ 为 α 级预星象函数，其全体记作 $R(\alpha)$[11].

下面定义 D^λ 算子[11]：

给定实数 $\lambda>-1$,用

$$D^\lambda f(z)=\frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}}*f(z),f(z)\in A\cdot$$

定义算子 D^λ，当 λ 为非负整数时，$D^\lambda f(z)=\dfrac{z\left(z^{\lambda-1}f(z)\right)^\lambda}{\lambda!}$.

利用展开式

$$D^\lambda f(z)=z+(\lambda+1)z^2+\cdots+\frac{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)}{(n-1)!}a_nz^n+\cdots, \tag{3.2.2}$$

得到如下两个恒等式

$$z\left(D^\lambda f(z)\right)'=(\lambda+1)D^{\lambda+1}f(z)-\lambda D^\lambda f(z) \tag{3.2.3}$$

$$z\left(D^\lambda f(z)\right)''=(\lambda+1)\left(D^{\lambda+1}f(z)\right)'-(\lambda+1)\left(D^\lambda f(z)\right)' \tag{3.2.4}$$

还定义比 D^λ 更为广泛的线性算子 $L(a,c)$. 设

$$\phi(a,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(a)_n/(c)_n\right]z^{n+1},z\in D,c\neq 0,-1,-2,\cdots$$

$$L(a,c)f(z)=\phi(a,c;z)*f(z),f(z)\in A. \tag{3.2.5}$$

其中 $(\xi)_n=\Gamma(n+\xi)/\Gamma(\xi)$.

由文[12]知，$L(a,c)$ 是 A 到自身 A 的连续映射，还容易得到

$$\phi\left[z(1-\alpha),1;z\right]=z/(1-z)^{2(1-\alpha)}. \tag{3.2.6}$$

另外，对于$c>a>0,L(a,c)f(z)$有积分表达式

$$L(a,c)f(z)=\int_0^1 u^{-1}f(uz)dh(a,c-a)(u). \tag{3.2.7}$$

其中η是β分布：

$$d\eta(a,c-a)(u)=\left[u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}/\beta(a,c-a)\right]du. \tag{3.2.8}$$

如果 $a\neq 0,-1,-2,\cdots,$则$L(a,c)$存在连续映射，且A到自身A的双方单值的映射，显然$L(a,a)$是单位算子，并且

$$L(a,c)=L(a,b)L(b,c)=L(b,c)L(a,b),b,c\neq 0,-1,-2,\cdots,$$

如果$g(z)=zf'(z)$,则$g(z)=L(2,1)f(z)$.和$f(z)=L(1,2)g(z)$

由（3.2.5）和（3.2.6）式，可知

$$L(\lambda+1,1)f(z)=D^{\lambda}f(z). \tag{3.2.9}$$

引进函数类$A(\lambda,\alpha,\beta)$：

定义 3.2.1 设$\lambda>-1,\alpha\geq 0,0\leq\beta<1$,若函数$f(z)\in A$,满足条件$f(0)=f'(0)-1=0$

和

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\right\}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}(z\in D). \tag{3.2.10}$$

则称函数$f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$.

由（3.2.9）式，将（3.2.10）式改写成

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{L(\lambda+1,1)f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\right\}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}, \tag{3.2.11}$$

当 $\lambda=0$时,函数类$A(0,\alpha,\beta)$满足条件

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\right\}\beta.(\alpha\ge 0,0\le\beta). \tag{3.2.12}$$

当 $\alpha=0$ 时，还得到文[13][14]中引进的函数类：$f(z)\in A(\lambda,\beta)$ 当且仅当

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}f(z)}+\frac{z'}{1-z}\right\}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}.$$

1. 积分表达式

定理 3.2.1 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$ 当且仅当存在 $X=\{x:|x|=1\}$ 上的概率测度 $\mu(x)$，使得

$$f(z)=L(1,\lambda+1)\left[z(1-z)^{1-\alpha}\exp\left\{-2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\int_{|x|=1}\log(1-xz)\,d\mu(x)\right\}\right]. \tag{3.2.13}$$

特别当 $\lambda>0$, 时，

$$f(z)=\int_0^1 u^{-1}\left[uz(1-uz)^{1-\alpha}\exp\left\{-2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\int_{|x|=1}\log(1-xuz)\,d\mu(x)\right\}\right]d\eta(1,\lambda)(u). \tag{3.2.14}$$

其中 η 是 β 分布，当 $\lambda=0$ 时，由 $L(1,1)$ 为单位算子可知

$$f(z)=z(1-z)^{1-\alpha}\exp\left\{-2(1-\beta)\int_{|x|=1}\log(1-xz)\,d\mu(x)\right\}, \tag{3.2.15}$$

对于固定的 $\lambda>-1,\alpha\ge 0,0\le\beta<1,A(\lambda,\alpha,\beta)$ 于 X 上的概率测度 $\{\mu\}$ 以关系式（3.2.13）构成一一对应.

证 设 $g(f,z,\lambda,\alpha)=\dfrac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{L(\lambda+1,1)f(z)}+(1-\alpha)\dfrac{z}{1-z}$，因为 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$ 等价于 $\left[g(f,z,\lambda,\alpha)-\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right]\Big/\left(1-\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\in P$, 这里 P 为标准正实部解析函数类，借助 P 中函数的 *Herglots* 表示公式（定理 2.1.5），

$$\frac{z\left(L(\lambda+1,1)f(z)\right)'}{L(\lambda+1,1)f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}=\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\int_{|x|=1}\frac{1+xz}{1-xz}d\mu(x)+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1},$$

其中 μ 是 X 上的概率测度，将此式代入恒等式

$$\frac{d}{dz}\log\frac{L(\lambda+1,1)f(z)}{z(1-z)^{1-\alpha}}=\frac{1}{z}\left[\frac{z\left(L(\lambda+1,1)f(z)\right)'}{L(\lambda+1,1)f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}-1\right],$$

即得

$$L(\lambda+1,1)f(z)=z(1-z)^{1-\alpha}\exp\left\{-2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\int_{|x|=1}\log(1-xz)d\mu(x)\right\}.$$

于是得到（3.2.13）式. 当 $\lambda>0$ 时，利用（3.2.7）式，由（3.2.13）式 得到（3.2.14）式；当 $\lambda=0$ 时，$L(1,1)$ 是单位算子，此时（3.2.13）式变为（3.2.15），对于固定的 $\lambda>-1,\alpha\geq 0,0\leq\beta<1$. 由于概率测度 $\{\mu\}$ 和 P 之间一一对应，而 P 和 $A(\lambda,\alpha,\beta)$ 之间也是一一对应，这表明定理的后一结论为真. 证毕.

推论 3.2.1 若 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$, 则

$$\frac{L(\lambda+1,1)f(z)}{z(1-z)^{1-\alpha}}\prec\frac{1}{(1-z)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}. \qquad (3.2.16)$$

证 因 $\log(1-z)$ 是 D 的解析且凸单叶函数，故存在 D 内的解析函数 $\omega(z):\omega(o)=0,|\omega(z)|\leq|z|$, 使得 $\int_{|x|=1}\log(1-xz)d\mu(x)=\log(1-\omega(z))$. 由（3.2.13）知 $L(\lambda+1,1)f(z)/z(1-z)^{1-\alpha}=(1-\omega(z))^{-2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}$. 这说明从属关系（3.2.16）成立.

从定理 3.2.1 得到如下包含关系：

定理 3.2.2 设 $\lambda_1>\lambda_2\geq-\beta,0\leq\beta<1$, 则 $A(\lambda_1,\alpha,\beta)\subset A(\lambda_2\alpha,\beta)$.

证 设 $\lambda\geq-\beta$, 在 $A(\lambda,\alpha,\beta)$ 上定义算子

$$T_\lambda:T_\lambda(f,\alpha)=\left(L(\lambda+1,1)f(z)\right)/(1-z)^{1-\alpha}$$

由（3.2.13）式知T_λ是$A(\lambda,\alpha,\beta)$至$\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}$级星象函数类$S^*\left(\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$的线性同胚. 又设$\lambda_1>\lambda_2\geq-\beta$, 由$\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}$是$\lambda$的单调增函数可知$S^*\left(\frac{\lambda_1+\beta}{\lambda_1+1}\right)\subset S^*\left(\frac{\lambda_2+\beta}{\lambda_2+1}\right)$, 又由算子$T_\lambda$的映射性质可知 $A(\lambda_1,\alpha,\beta)\subset A(\lambda_2\alpha,\beta)$. 证毕.

推论 3.2.2 设$\lambda\geq0,\alpha\geq0,0\leq\beta<1$, 则$A(\lambda,\alpha,\beta)\subset A(0,\alpha,\beta)$.

2. 极值点和支撑点

若赋予在D内的紧子集上一致收敛的拓扑，则在D内的解析函数类A构成一局部凸的线性拓扑空间. 我们以$\overline{co}F$表示F的闭凸包；以$E\left(\overline{co}F\right)$表示$\overline{co}F$的极值点集合；对紧子集$F\subset A$，若$f(z)\in F$且存在$A$上复值连续的线性泛函$J$，使得$\operatorname{Re}J$在$F$上不为常数，$\operatorname{Re}J(f)=\max\{\operatorname{Re}J(g),g(z)\in F\}$, 则称$f$为$F$的支撑点，以$SuppF$表示$F$的一切支撑点构成的集合，若$F$是紧集，$J$是$A$的复值连续性泛函，由$Kyein-Milman$定理 3.1.4 知道：

$$\max\{\operatorname{Re}J(f):f\in F\}=\max\{\operatorname{Re}J(f):f\in\overline{co}F\}=\max\left\{\operatorname{Re}J(f):f\in E\left(\overline{cof}\right)\right\}$$

所以寻求集合$\operatorname{Supp}F,\overline{co}F,E\left(\overline{co}F\right)$对于解决$F$上的极值问题特别重要.

我们已知：若$g(z)\in S^*(\beta)(0\leq\beta<1)$, 则对于$|z|=\mathrm{r}<1$, 有

$$|g(z)|\leq\frac{\mathrm{r}}{(1-\mathrm{r})^{2(1-\beta)}}=\phi\left[2(1-\beta),1;\mathrm{r}\right], \tag{3.2.17}$$

$$|g^{'}|z||\leq\frac{d}{d\gamma}\frac{\mathrm{r}}{(1-\mathrm{r})^{2(1-\beta)}}=L(2,1)\phi\left[2(1-\beta),1;\mathrm{r}\right]\Big/\mathrm{r}. \tag{3.2.18}$$

定理 3.2.3 对于$\lambda\geq0,\alpha\geq0,0\leq\beta<1$, $A(\lambda,\alpha,\beta)$是紧的并且

$$\overline{\text{co}}\text{A}(\lambda,\alpha,\beta)=\left\{f:f(z)=\int_{|x|=1}K(z,x,\lambda,\alpha,\beta)d\mu(x),\mu\in X\right\}. \tag{3.2.19}$$

$$E\left(\overline{co}A(\lambda,\alpha,\beta)\right)=\left\{K(z,x,\lambda,\alpha,\beta):|x|=1\right\}, \tag{3.2.20}$$

其中 X 表示 D 上概率测度的全体；对于 $\lambda\geq 0,\alpha\geq 0,0\leq\beta<1,$

$$SuppA(\lambda,\varepsilon,\beta)=E\left(\overline{co}A(\lambda,\alpha,\beta)\right)=\left\{K(z,x,\lambda,\alpha,\beta):|x|=1\right\}. \tag{3.2.21}$$

其中

$$K(z,x,\lambda,\alpha,\beta)=L(1,\lambda+1)\left[z(1-z)^{1-\alpha}\Big/(1-xz)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}\right].$$

证 对于 $\lambda>0$, 设 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$. 若 令

$$L(\lambda+1,1)f(z)/(1-z)^{1-\alpha}=\varphi(z),$$

则 $\varphi(z)\in S^*\left(\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$. 于是由（3.2.7）和（3.2.17）式，我们得到

$$f(z)\leq\int_0^1 u^{-1}(1+ur)^{1-\alpha}\left|\varphi(uz)\right|d\eta(1,\lambda)(u).$$

$$\leq L(1,\lambda+1)\frac{r(1+r)^{1-\alpha}}{(1-r)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}\left(|z|\leq r\right). \tag{3.2.22}$$

当 $\lambda=0$ 时，(3.2.22) 式成立,由此可知 $A(\lambda,\alpha,\beta)$ 在 D 内局部一致有界.

现在证明 $A(\lambda,\alpha,\beta)$ 是闭的.

设 $f_n(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$, 且 f_n 局部一致收敛于 $f(z)$, 则由 $\text{Re}\left[g(f_n,z,\lambda,\alpha)\right]>\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}$. 得到 $\text{Re}\left[g(f,z,\lambda,\alpha)\right]\geq\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}$. 根据调和函数的极值原理（定理 1.6.4），得到

$$\text{Re}\left[g(f,z,\lambda,\alpha)\right]>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}. \tag{3.2.23}$$

否则，在 D 内 $g(f,z,\lambda,\alpha)\equiv\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}$, 但当 $z=0$ 时. (3.2.23) 左端等于 1，这与 $\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}<1$ 矛盾. 这表明了 $A(\lambda,\alpha,\beta)$ 的紧性.

令

$$\mathrm{G}=\left\{f(z): f(z)=\int_{|x|=1} k(z,x,\lambda,\alpha,\beta)\,d\mu(x), \mu\in X\right\}. \qquad (3.2.24)$$

易知 G 是闭凸集并且

$$\mathrm{G}=\left\{f(z): f(z)=L(1,\lambda+1)\int_{|x|=1}\frac{z(1-z)^{1-\alpha}}{(1-xz)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}\,d\mu(x), \mu\in X\right\}. \qquad (3.2.25)$$

若 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$，则 $f(z)$ 由积分表达式（3.2.13）.根据（3.2.25）知，存在 $\gamma\in X$ 使得 $f(z)$ 表示为

$$f(z)=L(1,\lambda+1)\int_{|x|=1}\frac{z(1-z)^{1-\alpha}}{(1-xz)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}\,d\gamma(x), \gamma\in X$$

因而 $f(z)\in G$, 即 $A(\lambda,\alpha,\beta)\subset G$. 由于 G 是闭凸集，所以 $\overline{co}A(\lambda,\alpha,\beta)\subset G$.

另一方面，因为 $\{k(z,x,\lambda,\alpha,\beta):|x|=1\}\subset A(\lambda,\alpha,\beta)$, 所以 G 中任意函数均属于 $\overline{co}A(\lambda,\alpha,\beta)$, 即 $G\subset\overline{co}A(\lambda,\alpha,\beta)$. 这就证明了 $G=\overline{co}A(\lambda,\alpha,\beta)$. 因为 ∂D 上概率测度集合 $\{\mu\}$ 的极值点是点质量. 所以为证实

$$\overline{co}A(\lambda,\alpha,\beta)=\left\{L(1,\lambda+1)\left[z(1-z)^{1-\alpha}\Big/(1-xz)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}\right]:|x|=1\right\}$$

只要证明 $\overline{co}A(\lambda,\alpha,\beta)$ 与 $\{\mu\}$ 之间以（3.2.25）式形成一一对应. 令 $f_1,f_2\in\overline{co}A(\lambda,\alpha,\beta)$ 且与之对应的测度是 μ_1,μ_2. 若 $f_1=f_2$，有

$$\int_{|x|=1}(1-xz)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}\,d\mu_1(x)=\int_{|x|=1}(1-xz)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}\,d\mu_2(x)$$

由此推出 $\int_{|x|=1}x^n\,d\mu_1=\int_{|x|=1}x^n\,d\mu_2$.于是 $\mu_1=\mu_2$. 反之亦然.

对于 $\lambda\ge 0,\alpha\ge 0,0\le\beta<1$, 自然满足 $\lambda+\beta>0$. 因此如同定理 3.2.2 的证明，算子 $T_\lambda: T_\lambda(f)=L(\lambda+1,1)f(z)/(1-z)^{1-\alpha}$ 是 $A(\lambda,\alpha,\beta)$ 到 $S^*\left(\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$ 的线性同胚.而

$$SuppS^{*}\left(\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)=\left\{z\Big/(1-xz)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}:|x|=1\right\}. \tag{3.2.26}$$

所以

$$SuppA(\lambda,\alpha,\beta)=\left\{k(z,x,\lambda,\alpha,\beta):|x|=1\right\}. \tag{3.2.27}$$

结合上述证明可知（3.2.21）式成立. 证毕.

推论 3.2.3 设 $\beta\le\dfrac{1}{2}$, 则

$$\overline{co}A(1-2\beta,\alpha,\beta)=\left\{f(z):f(z)\in A,\mathrm{Re}\frac{L(2(1-\beta),1)f(z)}{z(1-z)^{1-\alpha}}>\frac{1}{2}\right\}.$$

证 因$\beta\le\frac{1}{2}$，所以$\lambda=1-2\beta\ge 0$，以M表示右端集合. 若$f(z)\in M$，则 $\left[\left(2L(2(1-\beta),1)f(z)\right)\Big/\left(z(1-z)^{1-\alpha}\right)\right]-\frac{1}{2}\in P$. 由 Herglotz 表示公式即得

$$f(z)=L(1,2(1-\beta))\int_{|x|=1}\left[z(1-z)^{1-\alpha}/(1-xz)\right]d\mu(x),\mu\in X.$$

或者

$$f(z)=\int_{|x|=1}k(z,x,1-2\beta,\alpha,\beta)d\mu(x),\mu\in X,$$

即$f(z)\in\overline{co}A(1-2\beta,\alpha,\beta)$.

反之，若$f\in\overline{co}A(1-2\beta,\alpha,\beta)$, 则由定理 3.2.3，得到

$$f(z)=\int_{|x|=1}L(1,2(1-\beta))\left[z(1-z)^{1-\alpha}/(1-xz)\right]d\mu(x),\mu\in X.$$

因而$L((2(1-\beta),1)f(z))\Big/\left(z(1-z)^{1-\alpha}\right)\prec(1-z)^{-1}$.故 $\mathrm{Re}\left[L(2(1-\beta),1)f(z)/z(1-z)^{1-\alpha}\right]>\frac{1}{2}$,

即$f(z)\in M$.这就证明了$\overline{co}A(1-2\beta,\alpha,\beta)=M$.

3. 关于实部的一个不等式.

我们利用一阶微分从属证明关于实部$\mathrm{Re}\left[\dfrac{\mathrm{L}(\lambda+1,1)f(z)}{z(1-z)^{1-\alpha}}\right]^{t}$的一个不等式.

如果ψ： $C\to C$是定义在区域E上的解析函数，$h(z)$是单位圆盘D上的单叶函数，若$p(z)$在D内解析并且具有$(p,zp')\in E, z\in D$, 且

$$\psi(p,zp')\prec h(z) \tag{3.2.28}$$

则称p为满足一阶微分从属.

定义 3.2.3 单叶函数q称微分从属式（3.2.28）的控制，$p(z)\prec q(z)$，对所有满足（3.2.28）的 p成立，若$\hat{q}$也是（3.2.28）式的一个控制，并且对所有的q成立$\hat{q}\prec q$,，则称$\hat{q}$为（3.2.28）的最佳控制（仅相差一个单位圆上的旋转）.

引理 3.2.1[15] 设h是D内凸单叶函数，θ和ϕ在区域E内解析. 设$p(z)$在D内解析，并且有$p(0)=h(0)=\theta(p(0))$和$p(D)\subset E$.

如果微分方程

$$\theta(q(z))+zq'(z)\phi(q(z))=h(z). \tag{3.2.29}$$

有一单叶解（在D内有定义）$q(z)$，满足$q(0)=h(0), \theta(q(z))\prec h(z)$, 则 满足关系

$$\theta(p(z))+zp'(z)\phi(p(z))\prec h(z) \tag{3.2.30}$$

的$p(z)$有$p(z)\prec q(z), q(z)$是（3.2.30）的最佳控制. 证明见文[15].

定理 3.2.4 设$f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta), \alpha\geq 0, \lambda\geq -\beta, \beta<1$, 则有

$$\left[\frac{L(\lambda+1,1)f(z)}{z(1-z)^{1-\alpha}}\right]^{t}\prec \frac{1}{2^{2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}, z\in D. \tag{3.2.31}$$

其中$0<2t\left(1-\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\leq 1$. 该结果为最佳的.

证 定义函数$p(z)$如下

$$p(z)=\left[\frac{L(\lambda+1,1)f(z)}{z(1-z)^{1-\alpha}}\right]^{t},z\in D \tag{3.2.32}$$

由$L(\lambda+1,1)f(z)$的定义可知$p(z)$是定义在D内的解析函数，而且满足$p(0)=1$.对（3.2.32）式取对数导数，便有

$$\frac{zp'(z)}{p(z)}=t\left[\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{L(\lambda+1,1)f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}-1\right].$$

由$f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$可知

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{L(\lambda+1,1)f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\right\}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1},$$

而它等价于

$$\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{L(\lambda+1,1)f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\prec\frac{1+\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)z}{1-z},$$

且 $\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{L(\lambda+1,1)f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\Big|_{z=0}=1$. 这样就得到

$$1+\frac{zp'(z)}{tp(z)}\prec\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)z}{1-z}$$

利用引理 3.2.1 ，取$\theta(.)=1,h(z)=\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}{1-z}$，这样就有

$$\theta(p(z))+\frac{zp'(z)}{tp(z)}\prec h(z)$$

$\theta(p(0))=p(0)=h(0=1)$,而从方程

$$1+\frac{zp'(z)}{tp(z)}=\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)z}{1-z}. \tag{3.2.33}$$

可求得 $q(z)=\frac{1}{(1-z)^{2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}$为其解，令

$$g(z)=\left(q(z)-1\right)\Big/2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right),$$

则

$$zg'(z)=\frac{z}{(1-z)^{2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)+1}},z\in D,0<2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\leq 1.$$

容易验证 $zg'(z)$ 是星象函数，所以 $g(z)$ 是凸函数，从而 $q(z)$ 也是凸函数，凸函数必单叶.故知 $q(z)$ 是（3.2.33）的单叶解，于是由引理 3.1 知 $p(z)\prec q(z)$, 并且

$q(z)=\dfrac{1}{(1-z)^{2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}$ 是最佳的. 证毕.

推论 3.2.4 若 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta),\lambda\geq-\beta,\alpha\geq 0,0\leq\beta<1,$ 则

$$\operatorname{Re}\left[\frac{L(\lambda+1,1)f(z)}{z(1-z)^{1-\alpha}}\right]^{t}>\frac{1}{2^{2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}},z\in D. \quad (3.2.34)$$

其中 $0<2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\leq 1$. 该结果是最佳的.

证 因为定理给出的是函数从属关系，所以我们需要求出函数 $q(z)=(1-z)^{-2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}$ 实部的最小值. 我们已知 $q(z)$ 是凸函数，另一方面，函数 $q(z)$ 关于实轴对称且 $q(0)=1$. 于是我们可以肯定 $\operatorname{Re}q(z)$ 的最小值必在实轴上达到. 考察函数 $q(z)=(1-z)^{-2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}$ 便知 $\operatorname{Re}q(z)>2^{-2t\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}$. 由定理 3.2.4 知（3.2.34）成立.并且该结果为最佳的. 证毕.

因为在 $A(0,\alpha,\beta)$ 上定义算子 $T_\alpha:T_\alpha(f)=\dfrac{f(z)}{(1-z)^{1-\alpha}}$. 则 T_α 是 $A(0,\alpha,\beta)$ 到 $S^*(\beta)$ 的线性同胚，所以对于 $g(z)\in S^*(\beta)$,存在 $f\in A(0,\alpha,\beta)$，使得

$$\frac{f(z)}{z(1-z)^{1-\alpha}}=\frac{g(z)}{z}. \quad (3.2.35)$$

从推论 3.2.4（取 $\lambda=0$）的证明可以看到，对于 $|z|=r<1$，有

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f(z)}{z(1-z)^{1-\alpha}}\right\}^{t}>\frac{1}{(1+r)^{2t(1-\beta)}}, \tag{3.2.36}$$

因 $0<2t(1-\beta)\le 1$，所以由（3.2.35）和（3.2..36）式，当 $t=1$ 时，得到

推论 3.2.5 设 $g(z)\in S^{*}(\beta)\left(\frac{1}{2}\le\beta<1\right)$，则对于 $|z|=r$，有

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{g(z)}{z}\right\}>\frac{1}{(1+r)^{2(1-\beta)}}. \tag{3.2.37}$$

且该结果为最佳的.

设 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta),\lambda\ge-\beta,\alpha\ge0,0\le\beta<1$，则

$$L(\lambda+1,1)f(z)/(1-z)^{1-\alpha}=g(z)\in S^{*}\left(\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right),$$

于是

$$f(z)=L(1,\lambda+1)(1-z)^{1-\alpha}g(z), \tag{3.2.38}$$

4. 偏差定理

定理 3.2.5 （1）若 $f(z)\in A(0,\alpha,\beta),\alpha\ge0,0\le\beta<1$，则

$$k(r,-1,0,\alpha,\beta)\le|f(z)|\le-k(-r,-1,0,\alpha,\beta),|z|=r, \tag{3.2.39}$$

（2）若 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta),\alpha\ge0,0\le\beta<1$，则

$$|f(z)|\le-k(-r,-1,\lambda,\alpha,\beta)(\lambda>0),|z|=r. \tag{3.2.40}$$

$$|f'(z)|\le-\frac{\partial}{\partial r}k(-r,-1,\lambda,\alpha,\beta).(\lambda>1),|z|=r. \tag{3.2.41}$$

（3）若 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta),\lambda\ge1-2\beta,0\le\beta<\frac{1}{2}$，则

$$|f(z)|\ge k(r,-1,\lambda,\alpha,\beta),|z|=r, \tag{3.2.42}$$

$$\left|f'(z)\right| \ge \frac{\partial}{\partial r} k(r,-1,\lambda,\alpha,\beta), |z| = r. \tag{3.2.43}$$

证 考虑连续凸泛函 $J(f) = |f|$ 时，由定理 3.2.3 关于 $E\left(\overline{co}A(\lambda,\alpha,\beta)\right)$ 结论即得（3.2.39）式.极值函数是 $k(z,-1,0,\alpha,\beta) = \left(z(1-z)^{1-\alpha}\right) / (1+z)^{2(1-\beta)}$.

设 $f(z) \in A(0,\alpha,\beta), \alpha \ge 0, 0 \le \beta < 1$，由（3.2.38）式，并应用（3.2.7）和（3.2.17）式，我们得到（3.2.40）式：

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\le \int_0^1 u^{-1}(1+ur)^{1-\alpha}|g(uz)|\,d\eta(1,\lambda)(u) \\
&\le \int_0^1 u^{-1}(1+ur)^{1-\alpha}\frac{ur}{(1-ur)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}d\eta(1,\lambda)(u) \\
&= L(1.\lambda+1)\frac{r(1+r)^{1-\alpha}}{(1-r)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}} \\
&= -k(-r,-1,\lambda,\alpha,\beta)\ (\lambda>0), |z|=r.
\end{aligned}$$

再利用（3.2.38）式，得到

$$L(2,1)f(z) = L(2,1)(1-z)^{1-\alpha}g(z). \tag{3.2.44}$$

当 $\lambda > 1$ 时，由（3.2.44）式，并利用（3.2. 7 ）和（3.2.17）式，我们得到（3.2.41）式：

$$\begin{aligned}
\left|f'(z)\right| &\le \frac{1}{r}\int_0^1 u^{-1}(1+ur)^{1-\alpha}|g(uz)|\,d\eta(2,\lambda-1)(u) \\
&\le \frac{1}{r}\int_0^1 u^{-1}(1+ur)^{1-\alpha}\frac{ur}{(1-ur)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}d\eta(2,\lambda-1)(u) \\
&= L(2,\lambda+1)\frac{r(1+r)^{1-\alpha}}{(1-r)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}} \\
&= -\frac{\partial}{\partial r}k(-r,-1,\lambda,\alpha,\beta)\ (\lambda>0), |z|=r.
\end{aligned}$$

设 $f(z) \in A(\lambda,\alpha,\beta), \lambda \ge 1-2\beta, 0 \le \beta < \frac{1}{2}.$ 又假设推出 $\lambda \ge 1-2\beta > 0$ 和 $\frac{1}{2} \le \frac{\lambda+\beta}{\lambda+1} < 1.$ $g(z)$ 是由（3.2.38）式定义的函数且 $g(z) \in S^*\left(\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$. 考虑函数

$\mathrm{Re}\left\{(1-z)^{1-\alpha}g(z)/z\right\}$，它在圆周 $|z|=r(0<r<1)$ 上的连续实值函数，在 $|z|=r(0<r<1)$ 上达到最小值．假设 $\mathrm{Re}\left\{(1-z)^{1-\alpha}g(z)/z\right\}$ 的最小值在 $|z|=r(0<r<1)$ 上的 z_1 达到（这样的点不只一个），而且不妨设 z_1 落在实轴上，即 $z_1=r$，否则考虑函数 $\mathrm{Re}\left\{\left(1-ze^{i\theta}\right)^{1-\alpha}g\left(ze^{i\theta}\right)/ze^{i\theta}\right\}$，于是有

$$\mathrm{Re}\left\{(1-z)^{1-\alpha}g(z)/z\right\}\geq(1-r)^{1-\alpha}\mathrm{Re}\left\{g(z)/z\right\}$$

注意上式并利用（3.2.38）式，应用（3.2.7）式和推论 3.2.5，我们可证得（3.2.42）式：

$$\begin{aligned}
|f(z)|&=r\left|\int_0^1 u^{-1}(1-ur)^{1-\alpha}g(uz)\,d\eta(1,\lambda)(u)/z\right| \\
&\geq \mathrm{Re}\int_0^1 u^{-1}\left[ur(1-ur)^{1-\alpha}g(uz)/uz\right]d\eta(1,\lambda)(u) \\
&\geq \int_0^1 u^{-1}ur(1-ur)^{1-\alpha}\left[g(uz)/uz\right]d\eta(1,\lambda)(u) \\
&\geq \int_0^1 u^{-1}\frac{ur(1-ur)^{1-\alpha}}{(1+ur)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}d\eta(1,\lambda)(u) \\
&=L(1,\lambda+1)\frac{r(1-r)^{1-\alpha}}{(1+r)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}} \\
&=k(r,-1,\lambda,\alpha,\beta)\ (\lambda>0),|z|=r.
\end{aligned}$$

当 $r=0$ 时，（3.2.42）也成立.

利用恒等式

$$r\frac{\partial}{\partial r}|f(z)|=|f(z)|\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}.$$

可得

$$\frac{\partial}{\partial r}|f(z)|\leq|f'(z)|. \tag{3.2.45}$$

于是由（3.2.42）和（3.2.45）式，证得（3.2.43）式：

$$|f'(z)|\geq\frac{\partial}{\partial r}|f(z)|\geq\frac{\partial}{\partial r}k(r,-1,\lambda,\alpha),|z|=r.$$

（3.2.39）-（3.2.43）式的极值函数是

$$k(z,-1,\lambda,\alpha,\beta)=L(1,\lambda+1)\frac{z(1-z)^{1-\alpha}}{(1+z)^{2\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)}}. \qquad (3.2.46)$$

5. 卷积性质

引理 3.2.2 设$g(z),h(z),g(z)+h(z)$在 D 内均单叶，$g(D)\cap h(D)=\phi$，且 $f(z)\prec g(z),e(z)\prec h(z)$, 则$f(z)+e(z)\prec g(z)+h(z)$.（其中符号$\prec$表示从属关系）

证 根据从属原理（定理 2.1.3）可知 $f(0)=g(0),e(0)=h(0)$, 且$f(\mathrm{D})\subset g(\mathrm{D}), e(\mathrm{D})\subset h(\mathrm{D})$, 于是

$$f(0)+g(0)=e(0)+h(0), f(\mathrm{D})\cup g(\mathrm{D})\subset e(\mathrm{D})\cup h(\mathrm{D}).$$

又因为$g(z)+h(z)$为单叶，再由从属原理得到$f(z)+e(z)\prec g(z)+h(z)$. 证毕.

引理 3.2.3 设$f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$，$0<\alpha<1, 0\le\beta<\frac{1-\alpha}{2}$, $\frac{1-\alpha-2\beta}{1+\alpha}\le\lambda<\frac{1-\alpha-2\beta}{1-\alpha}$, 则

$$D^{\lambda}f(z)\in S^{*}\left(\frac{1}{2}(1-\alpha)+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$$

证 因$f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$，有

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\right\}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}, z\in D.$$

这个不等式等价于

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\right\}\prec\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)z}{1-z}, z\in D$$

我们已知$\frac{-z}{1-z}$是凸单叶函数，容易验证函数

$$g(z)=\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)z}{1-z}\text{ 和 }h(z)=\frac{1+\left(1-2\left(\frac{1-\alpha}{2}+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\right)z}{1-z}, z\in D, 0\le\lambda<1-2\beta, 0\le\beta<\frac{1}{2}$$

均为单叶函数且$g(D)\cap h(D)=\phi$. 于是由引理 3.2.2 得到

$$\frac{z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}f(z)}\prec\frac{1+\left(1-2\left(\frac{1-\alpha}{2}+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\right)z}{1-z},z\in D$$

这意味着$D^{\lambda}f(z)\in S^{*}\left(\frac{1}{2}(1-\alpha)+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$. 证毕.

需要如下引理.

引理 3.2.4[27] 设$\phi(z)\in R(\beta),g(z)\in S^{*}(\beta)$,如果$p(z)$在单位圆盘 D 内解析且$\operatorname{Re}p(z)>r$,则

$$\operatorname{Re}\frac{(\phi*pg)(z)}{(\phi*g)(z)}>0,z\in D.$$

证 (1) 首先证明 设$h(z)$为 D 内解析函数，且 $h(0)=0$,若存在 $\xi,|\xi|=1$使得

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\xi z)\frac{h(z)}{z}\right\}>0,z\in D. \tag{3.2.47}$$

则 $\varphi(z)*h(z)\neq0,(0<|z|<1)$, $\varphi(z)\in S^{*}(1/2)$.

事实上，由正实部函数的 Herglotz 公式，我们得到

$$\frac{h(z)}{h'(0)}=\int_{T}\frac{z(1+\gamma\sigma z)}{(1-\sigma z)(1-\xi z)}d\mu(\sigma),\ |\gamma|=1,\gamma\neq-1.$$

从而

$$\frac{1}{h'(0)}\varphi(z)*h(z)=\frac{\varphi(\xi z)}{\xi}\int_{T}\left\{(\gamma+1)\frac{\varphi(z)*z(1-\xi z)^{-1}(1-\sigma z)^{-1}}{\varphi(z)*z(1-\xi z)^{-1}}-\gamma\right\}d\mu.$$

$f(z)\in S^{*}(1/2)\Rightarrow\operatorname{Re}\frac{f(z)*z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}}{f(z)*z(1-\sigma_1 z)^{-1}},|\sigma_1|\leq1,|\sigma_2|\leq1.$知被积函数在不包含 0 的半平面内，且$\varphi(\xi z)\neq0(0<|z|<1)$，由此即得（3.2.47）.

（2）引理 3.6.4 充分说明对于每个α，σ满足：$|\alpha|=|\sigma|=1,$

于是有

$$\varphi(z)*\frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z}\psi(z)\neq 0,\ (0<|z|<1).$$

由 (1) 此关系式证明了如果对每个这样的 α 和 σ 都存在 $\xi\ a(|a|=|\xi|=1)$ 使得

$$\operatorname{Re}\left\{a(1-\xi z)\frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z}\cdot\frac{\psi(z)}{z}\right\}>0, z\in D. \tag{3.2.48}$$

由于 $\psi(z)\in S^*(1/2)$,立刻证得对每个 $\sigma(|\sigma|=1)$，函数 $\psi(z)/(1-\sigma z)$ 是星象的,应用定理:

对任意的实数 t 令 t^* 满足 $h(t)\leq t^*\leq k(t)$.

$$\operatorname{Im}\left\{e^{-iv(t)}e^{\frac{1}{2}i(t+t^*)}\left(1-ze^{-it}\right)\left(1-ze^{-it^*}\right)\frac{f(z)}{z}\right\}\geq 0, z\in D.$$

由此证明了(3.2.48).

利用引理 3.2.4 不难证明:

引理 3.2.5 对于 $\beta_1\leq\beta_2<1, 0<r<1$, 设 $\phi(z)\in R(\beta_1), g(z)\in S^*(\beta_2)$, 如果 $p(z)$ 在 D 内解析且 $\operatorname{Re}p(z)>r$, 则

$$\operatorname{Re}\frac{(\phi*pg)(z)}{(\phi*g)(z)}>r, z\in D.$$

定理 3.2.5 设 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$，$0<\alpha<1, 0\leq\beta<\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha-2\beta}{1+\alpha}\leq\lambda<\frac{1-\alpha-2\beta}{1-\alpha}$，又设 $\phi(z)\in R(\beta)$, 则 $(\phi*f)(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$.

证 由引理 3.2.3 知，$D^\lambda f(z)\in S^*\left(\frac{1}{2}(1-\alpha)+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$. 令

$$p(z)=\frac{z\left(D^\lambda f(z)\right)'}{D^\lambda f(z)},$$

则 $\operatorname{Re}p(z)>\frac{1}{2}(1-\alpha)+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}$. 再根据引理 3.2.5，得到

$$\operatorname{Re}\frac{\left(\phi*pD^\lambda f\right)(z)}{\left(\phi*D^\lambda f\right)(z)}>\frac{1-\alpha}{2}+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1},$$

即

$$\mathrm{Re}\frac{\left(\phi*p\left(D^{\lambda}f\right)'\right)(z)}{\left(\phi*D^{\lambda}f\right)(z)}>\frac{1-\alpha}{2}+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}.$$

注意到

$$\left(\phi*z\left(D^{\lambda}f\right)'\right)(z)=z\left(\phi*D^{\lambda}f\right)'(z),\left(\phi*D^{\lambda}f\right)(z)=D^{\lambda}(\phi*f)(z),$$

我们有

$$\mathrm{Re}\frac{z\left[D^{\lambda}(\phi*f)\right]'(z)}{D^{\lambda}(\phi*f)(z)}>\frac{1-\alpha}{2}+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1},$$

或者

$$\mathrm{Re}\frac{z\left[D^{\lambda}(\phi*f)\right]'(z)}{D^{\lambda}(\phi*f)(z)}\prec\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)z}{1-z},$$

利用实部不等式

$$\mathrm{Re}\left[(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\right]>-\frac{1-\alpha}{2},\quad z\in D.$$

得到

$$\frac{z\left(D^{\lambda}(\phi*f)\right)'(z)}{D^{\lambda}(\phi*f)(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\prec\frac{1+\left(1-2\left(\frac{1-\alpha}{2}+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\right)z}{1-z}.$$

此即 $(\phi*f)(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$. 证毕.

定理 3.2.6 设 $f(z)\in A(\lambda,0,\beta),g(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$，$0\le\lambda<1-2\beta,0\le\beta<\frac{1}{2}$, 则 $(f*g)(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$.

证 因 $f(z)\in A(\lambda,0,\beta)$且$\lambda\ge 0$, 由定理 3.2.2 知$f(z)\in A(0,0,\beta)$. 根据引理 3.2.3 推出 $f\in S^*\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\subset S^*\left(\frac{1}{2}\right)$. 由 $R(\beta)$ 的定义知 $R\left(\frac{1}{2}\right)=S^*\left(\frac{1}{2}\right)$. 于是 $f\in R\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$. 设 $g(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$应用定理 3.2.5 便知$(f*g)(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$. 定理 3.2.6 证毕.

§3.3 用 D^{λ} 算子定义的解析函数类 $J(\lambda,\alpha,\beta)$

本节中要讨论有关 β 级的 $\alpha-$ 凸函数的一类解析函数 $J(\lambda,\alpha,\beta)$ 的性质. 得到包含关系，证明类 $J(\lambda,\alpha,\beta)$ 中函数的实部不等式[16][17].

定义 3.3.1 设 $0\le\alpha\le 1, 0\le\beta<1, \lambda>-1$, 如果函数 $f(z)\in A$ 满足条件

$$\frac{f(z)f'(z)}{z}\neq 0, \mathrm{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{D^{\lambda+1}f(z)}{D^{\lambda}f(z)}+\alpha\frac{\left(D^{\lambda+1}f(z)\right)'}{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}\right\}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}. \tag{3.3.1}$$

则称 $f(z)$ 在 $J(\lambda,\alpha,\beta)$ 中.当 $\lambda=0$ 时，$J(0,\alpha,\beta)=J(\alpha,\beta)$ 为熟知的 β 级的 $\alpha-$ 凸函数[18][19]:

$$J(\alpha,\beta)=\left\{f\in A:\mathrm{Re}\left[(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right]>\beta\right\}.$$

1. 包含关系

定理 3.3.1 若 $f(z)\in J(\lambda,\alpha,\beta)$, 则 $f(z)\in J(\lambda,0,\beta)$.

证 令 $p(z)=\dfrac{D^{\lambda+1}f(z)}{D^{\lambda}f(z)}, \psi(z)=\dfrac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)z}{1-z}$. 易知 $\mathrm{Re}\,p(z)>\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}$ 等价于 $p(z)\prec\psi(z)$. 需证

$$p(z)\prec\psi(z). \tag{3.3.2}$$

$p(z)\equiv 1$ 时结论显然成立. 若 $p(z)\neq 1$ 且（3.3.2）不真，根据从属原理存在 $z_0\in D$, 使 $p(z_0)\in\partial\psi(D), p(|z|<|z_0|)\subset\psi(D)$（否则（3.3.2）式成立）.由于 *Jaka* 引理,

$p(z_0)=\psi(\xi_0), z_0p'(z_0)=m\xi_0\psi'(\xi_0), \xi_0=e^{i\theta 0}$, $m\geq 1$, 显然 $\xi_0\neq 1$ 且 $\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}=0$, 即

$\lambda=-\beta$ 时 $\xi_0\neq -1$.

$$\mathrm{Re}\left\{(1-\alpha)p(z_0)+\alpha\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{(1-\alpha)\psi(\xi_0)+\alpha\frac{m_0\psi'(\xi_0)}{\psi(\xi_0)}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\xi_0}{1-\xi_0}+2m\alpha\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\frac{\xi_0}{(1-\xi_0)\left[1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\xi_0\right]}\right\}$$

$$=(1-\alpha)\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}-2m\alpha\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\left(1-\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\left[1+2(1-2\alpha)los\theta_0t(1-2\alpha)^2\right]^{-1}$$

$$\leq(1-\alpha)\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\leq\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}.$$

这与

$$(1-\alpha)p(z)+\frac{xzp'(z)}{p(z)}=(1-\alpha)\frac{D^{\lambda+1}f(z)}{D^{\lambda}f(z)}+\alpha\frac{\left(D^{\lambda+1}f(z)\right)'}{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'},$$

和 $f(z)\in J(\lambda,\alpha,\beta)$ 矛盾，（3.3.2）式成立. 证毕.

推论 3.3.1 设 $\lambda\geq 1, 0\leq\beta<1$, 则 $J(\alpha,\beta)\subset S^*(\beta)$.

定理 3.3.2 设 $0\leq\alpha_1\leq\alpha_2<1, 0\leq\beta_1\leq\beta_2\leq 1$, 则

$$J(\lambda,\alpha_2,\beta_2)\subset J(\lambda,\alpha_1,\beta_1).$$

证 当 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 时定理是平凡的. 设 $\alpha_2>0$ 和 $f(z)\in J(\lambda,\alpha_2,\beta_2)$, 则

$$\mathrm{Re}\left\{(1-\alpha_2)\frac{D^{\lambda+1}f(z)}{D^{\lambda}f(z)}+\alpha_2\frac{\left(D^{\lambda+1}f(z)\right)'}{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}\right\}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}. \qquad (3.3.3)$$

利用恒等式

$$(1-\alpha)\frac{D^{\lambda+1}f(z)}{D^{\lambda}f(z)}+\alpha_1\frac{\left(D^{\lambda+1}f(z)\right)'}{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}=\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{D^{\lambda+1}f(z)}{D^{\lambda}f(z)}+$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[(1-\alpha_2)\frac{D^{\lambda+1}f(z)}{D^{\lambda}f(z)}+\alpha_2\frac{\left(D^{\lambda+1}f(z)\right)'}{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}\right], z\in D \tag{3.3.4}$$

由（3.3.3）和（3.3.4）式，结合定理 3.3.1，得到不等式

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha_1)\frac{D^{\lambda+1}f(z)}{D^{\lambda}f(z)}+\alpha_1\frac{\left(D^{\lambda+1}f(z)\right)'}{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}\right\}>\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\frac{\lambda+\beta_2}{\lambda+1}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\lambda+\beta_2}{\lambda+1}$$

$$=\frac{\lambda+\beta_2}{\lambda+1}\geq\frac{\lambda+\beta_1}{\lambda+1}.$$

于是 $J(\lambda,\alpha_2,\beta_2)\subset J(\lambda,\alpha_2,\beta_2)$. 证毕.

由 $D^{\lambda}f$ 的两个恒等式（3.2.3）和（3.2.4），我们还得到：

定理 3.3.3 $f(z)\in J(\lambda,\alpha,\beta)\Leftrightarrow D^{\lambda}f(z)\in J(\alpha,\beta)$.

2. 实部不等式

定理 3.3.4 设 $0<\alpha<1, \alpha\leq\beta<1$. $f(z)\in J(\lambda,\alpha,\beta)$ 当且仅当

$$\operatorname{Re}\frac{\alpha z\left[\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]'}{(1-\alpha)\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}>\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}. \tag{3.3.5}$$

幂函数取主值，以下相同.

证 设 $f(z)\in J(\lambda,\alpha,\beta)$，置

$$(1-\alpha)\frac{D^{\lambda+1}f(z)}{D^{\lambda}f(z)}+\alpha\frac{\left(D^{\lambda+1}f(z)\right)'}{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}=\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}+p(z). \tag{3.3.6}$$

则 $p(z)$ 在 D 内解析且 $\operatorname{Re}p(z)>0$.（3.3.6）式两边乘以 $\frac{1}{\alpha}\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$ 得到

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)D^{\lambda+1}f(z)\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-2}+\left(D^{\lambda+1}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$=\left(p(z)+\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)\frac{1}{\alpha}\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \tag{3.3.7}$$

由此推出

$$\operatorname{Re}\frac{\left[D^{\lambda+1}f(z)\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]'}{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}>\frac{\lambda+\beta}{\alpha(\lambda+1)}, \tag{3.3.8}$$

利用恒等式（3.3.3）式:

$$z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'=(\lambda+1)D^{\lambda+1}f(z)-\lambda D^{\lambda}f(z).$$

从（3.3.8）式得到（3.3.5）式.上述证明是可 的. 证毕.

定理 3.3.5 设 $\lambda>-1,0<\alpha<1,\alpha\le\beta<1,f(z)\in J(A,\alpha,\beta)$, 则

$$\left\{\frac{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\right\}^{\mu}\prec\frac{1}{(1-z)^{\frac{2\mu}{\alpha}(1-\beta)}}, z\in D. \tag{3.3.9}$$

其中 $0<\frac{2\mu(1-\beta)}{\alpha}\le 1$, 该结果为最佳的.

证 定义 $p(z)$ 如下

$$p(z)=\left\{\frac{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\right\}^{\mu}, z\in D \tag{3.3.10}$$

由 $D^{\lambda}f(z)$ 的定义可知 $p(z)$ 是在 D 内的解析函数，且 $p(0)=1$, 对（3.3.10）式取对数导数便有

$$\frac{zp'(z)}{p(z)}=\frac{\mu(1-\alpha)}{\alpha}\left\{\frac{\alpha z\left[\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]'}{(1-\alpha)\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}-1\right\}, \tag{3.3.11}$$

由定理 3.3.4 知

$$\frac{\alpha z\left[\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]'}{(1-\alpha)\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}\prec\frac{1+\left(1-2\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right)z}{1-z}=h(z)$$

$$\frac{\alpha z\left[\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]'}{(1-\alpha)\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}\Big|_{z=0}=1$$

这样就有

$$1+\frac{\alpha zp'(z)}{(1-\alpha)\mu p(z)}\prec h(z)$$

利用引理 3.2.1， 取$\theta(.)=1$,这样就得到

$$\theta(p(z))+\frac{\alpha zp'(z)}{\mu(1-\alpha)p(z)}\prec h(z),\ \theta(p(0))=p(0)=h(0)=1,$$

而从方程

$$1+\frac{\alpha zp'(z)}{(1-\alpha)\mu p(z)}=h(z), \tag{3.3.12}$$

可求得$q(z)=(1-z)^{\frac{-2\mu}{\alpha}(1-\beta)}$为其解 ，令$g(z)=\frac{q(z)-1}{\alpha^{-1}2\mu(1-\beta)}$. 则

$$zg'(z)=\frac{z}{(1-z)^{\frac{2\mu}{\alpha}(1-\beta)}},z\in D,0<\frac{2\mu}{\alpha}(1-\beta)\leq 1.$$

容易验证$zg'(z)$也是形象函数，所以$g(z)$为凸象函数，从而$q(z)$也是凸函数，凸函数必单叶.故知$q(z)$是（3.2.12）的单叶解 .由引理 3.2.1 知$p(z)\prec q(z)$, 并且$q(z)=(1-z)^{-\frac{2\mu}{\alpha}(1-\beta)}$是最佳的. 证毕.

用推论 3.2.4 相同的方法，可以证明

推论 3.3.5 设$\lambda>-1,0<\alpha<1,\alpha\leq\beta<1,f(z)\in J(\lambda,\alpha,\beta)$, 则

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\left(D^{\lambda}f(z)\right)'\left(D^{\lambda}f(z)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\right\}^{\mu}>\frac{1}{2^{\frac{2\mu}{\alpha}(1-\beta)}},z\in D.$$

其中$0<\frac{2\mu}{\alpha}(1-\beta)\leq 1$.该结果为最佳的.

注 在推论 3.3.5 中当$\lambda=0$时该得到$\mathrm{J}(\alpha,\beta)$中的相应结果.

§ 3.4 函数类 $A(\alpha,\beta,\mu)$ 和 $G(\alpha,\beta,\mu)$ 的性质

本节中,利用算子理论和借助一种变分法得到 $A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$ 上 $F\hat{r}echet$ 可导泛函所对应的极值函数,用一阶微分从属证明,关于子类中函数的准确实部不等式,并推出 $G(\alpha,\beta,\mu)$ 的相应性质.

1. 有关的定义

设 X 表示单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内所有解析函数构成的空间,赋予在紧集上一致收敛的拓扑,那么 X 成为一局部凸的拓扑向量空间. 设 T 为 X 的一紧子集, J 是 T 上定义的复值连续泛函,如果对某 $f\in T$ 以及 f 的任意变分 $f_\varepsilon=f+g\varepsilon+o(\varepsilon)(\varepsilon\to 0)$,存在 X 上的线性连续泛函 $I=I(f,\cdot)$ 使得

$$J(f_\varepsilon)=J(f)+\varepsilon I(f,g)+o(\varepsilon)(\varepsilon\to 0).$$

那么称 J 在 f,相对于 T 为 $F\hat{r}echet$ 可导的, I 成为 J 在 f 的 $F\hat{r}echet$ 导数;对于 $f\in T$,如果存在一个定义于 X 上非常数的线性连续泛函 L,使得 $R_eL(f)=Max\{\operatorname{Re}L(g):g\in T\}$,则称 f 为 T 的支撑点,记 T 的全部支撑点为 SuppT. S 表示在单位圆 D 内解析函数 $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ 构成的类.显然 $S\subset X$.

本节中 σ,α,β,μ 均满足: $\sigma\in R,\alpha\ge 0,0\le\beta<1,0<\mu\le 1$, 幂函数取主值.

对给定实数 σ, 用

$$H^{\sigma}f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}k^{-\sigma}a_kz^k,\ f(z)\in S \tag{3.4.1}$$

定义算子 H^{σ}, 显然 $H^{\sigma}H^{-\sigma}f=H^{\sigma}H^{-\sigma}f=f,H^{-\sigma}$ 为 H^{σ} 的逆算子.

引进并讨论如下两类解析函数[20]:

定义 3.4.1 设 $\alpha\ge 0,0\le\beta<1,0<\mu\le 1,$ 在 D 内满足条件

$$\left|\arg\left[\frac{z(H^{\sigma}f(z))'}{H^{\sigma}f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}-\beta\right]\right|<\frac{\mu\pi}{2},f(z)\in S, \tag{3.4.2}$$

的解析函数 $f(z)$ 的全体记为 $A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$. 还得到:

$$A(\sigma,\alpha,\beta,1)=\left\{f(z)\in S:\mathrm{Re}\left[\frac{z(H^{\sigma}f(z))'}{H^{\sigma}f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\right]>\beta,z\in D\right\},$$

$$A(0,1,\beta,\mu)=\left\{f(z)\in S:\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-\beta\right)\right|<\frac{\mu\pi}{2},z\in D\right\}.$$

定义 3.4.2 在 D 内满足条件:

$$\left|\arg\left[\frac{2zS'(z)}{S(z)}+(1-\alpha)\frac{1+z}{1-z}-\beta\right]\right|<\frac{\mu\pi}{2},$$

的解析函数 $S(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}s_nz^n$ 的全体记为 $G(\alpha,\beta,\mu)$. 其中 α,β,μ 如同定义 3.4.1. 称 $G(\alpha,\beta,\mu)$ 为拓广的 Robertson 函数类. $G(\alpha,\beta,1)$ 为 β 级 $\alpha-$Robertson 函数类. 当 $\alpha=0$ 时熟知的 β 级 Robertson 函数类[21]:

$$R(\beta)=\left\{S(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}s_nz^n\in A:\mathrm{Re}\left[\frac{2zS'(z)}{S(z)}+\frac{1+z}{1-z}\right]>\beta\right\}$$

2. 极值问题

定理 3.4.1 若函数 $f(z)\in A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$, 则存在 $p(z)\in P$, 使得

$$f(z)=H^{-\sigma}\left\{z(1-z)^{1-\alpha}\exp\left(\int_0^z\frac{p^{\mu}(\xi)-1+\beta}{\xi}d\xi\right)\right\}. \tag{3.4.3}$$

证 $f(z)\in A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$ 当且仅当存在 $p(z)\in P$, 使得

$$\frac{z(H^{\sigma}f(z))'}{H^{\sigma}f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}-\beta=p^{\mu}(z)$$

即

$$\left(Ln\frac{H^{\sigma}f(z)}{z(1-z)^{1-\alpha}}\right)'=\frac{p^{\mu}(z)-1+\beta}{z}$$

由此推出 $H^{\sigma}f(z)=z(1-z)^{1-\alpha}\exp\left(\int_0^z\frac{p^{\mu}(\xi)-1+\beta}{\xi}d\xi\right)$, 利用算子 H^{σ} 的可逆

性,(3.4.3)式成立. 证毕.

推论 3.4. 1 $f(z)\in A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$,当且仅当$\frac{H^{\sigma}f(z)}{(1-z)^{1-\alpha}}\in A(0,1,\beta,\mu)$.

推论 3.4. 2 $f(z)\in A(\sigma,\alpha,0,\mu)$,当且仅当$\frac{H^{\sigma}f(z)}{(1-z)^{1-\alpha}}\in A(0,1,0,\mu)$.

与定理 3.4.1 相同的方法容易证明

定理 3.4.2 若函数$S(z)\in G(\alpha,\beta,\mu)$,则存在$p(z)\in P$,使得

$$S(z)=(1-z)^{1-\alpha}\exp\left(\int_0^z\frac{p^{\mu}(\xi)-\frac{1}{2}(1-\beta)}{\xi}d\xi\right)$$

注 在定理 3.4.2 中$\mu=1$时,得到β级$\alpha-$Robertson 函数的结果.

定理 3.4.3 设 L 为$A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$上的连续泛函,$f_0(z)\in A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$且$\operatorname{Re}f_0(z)=\max\{\operatorname{Re}L(f(z)):f(z)\in A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)\}$. 若 L 在$f_0(z)$相对于$A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$具有$F\hat{r}echet$导数 I, I 不具有形式

$$I(f_0(z),h(z))=ah(0)+bh'(0)(a,b\in C)\text{(C 为常数)},$$

则

$$f_0(z)=H^{-\sigma}\left\{z(1-z)^{1-\alpha}\exp\left[\int_0^z\frac{\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{1+x_kz}{1-x_kz}\right)^{\mu}+\beta-1}{z}dz\right]\right\}. \quad (3.4.4)$$

其中$m\in N;\lambda_k>0,\sum_{k=1}^{m}\lambda_k=1;|x_k|=1,x_k$互不相同, $k=1,2,\cdots,m$.

证 记 $A'(\sigma,\alpha,\beta,\mu)=\{H^{\sigma}f(z):f(z)\in A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)\}$,在$A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$上定义算子$M:M(f)=H^{\sigma}f$,则 M 是$A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$到$A'(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$的一个线性同胚.根据$H^{\sigma}$的映射性质,我们把问题转化为$A'(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$的问题.

设 $G:P\to A'(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$,则

$$G(p)=z(1-z)^{1-\alpha}\exp\left(\int_0^z\frac{p^{\mu}(\xi)-1+\beta}{\xi}d\xi\right). \quad (3.4.5)$$

那么 G 为 P 与$A'(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$的同胚映射.令$J(p)=L(G(p))$.则 J 为 P 上的连续泛函.

下面分三步来证明:

(1) 首先，证明 p_0 相对于 P 具有 $F\hat{r}echet$ 导数: 设

$p_\varepsilon = p_0 + g\varepsilon + o(\varepsilon)(\varepsilon \to 0)$, p_0 的一个变分.记 $H^\sigma f_\varepsilon = G(p_\varepsilon)$, $H^\sigma f_0 = G(p_0)$.那么

$$
\begin{aligned}
H^\sigma f_\varepsilon &= z(1-z)^{1-\alpha} \exp\left(\int_0^z \frac{p_\varepsilon^\mu - 1 + \beta}{\xi} d\xi \right) \\
&= z(1-z)^{1-\alpha} \exp\left[\int_0^z \frac{p_0^\mu - 1 + \beta}{\xi} d\xi + \varepsilon \int_0^z \frac{\mu g p_0^{\mu-1}}{\xi} d\xi + o(\varepsilon) \right] \\
&= z(1-z)^{1-\alpha} \exp\left(\int_0^z \frac{p_0^\mu - 1 + \beta}{\xi} d\xi \right)\left(1 + \int_0^z \frac{\mu g p_0^{\mu-1}}{\xi} d\xi + o(\varepsilon) \right) \\
&= H^\sigma f_0 + A(H^\sigma f_0, g)\varepsilon + o(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{3.4.6}
$$

其中

$$A(H^\sigma f_0, g) = H^\sigma f_0 \cdot \int_0^z \frac{\mu g p_0^{\mu-1}}{\xi} d\xi \quad (g(0) = 0).$$

故 $H^\sigma f_\varepsilon$ 为 $H^\sigma f_0$ 关于 $A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$ 的一个变分.由于 L 在 $H^\sigma f_0$ 具有 $F\hat{r}echet$ 导数 I,

故有 $L(H^\sigma f_\varepsilon) = L(H^\sigma f_0) + I(H^\sigma f_0, g)\varepsilon + o(\varepsilon)$，即

$$J(p_\varepsilon) = J(p_0) + I_1(p_0, g)\varepsilon + o(\varepsilon) \tag{3.4.7}$$

其中

$$I_1(p_0, g) = I(H^\sigma f_0, A(H^\sigma f_0, g)).$$

记 $X_0 = \{H^\sigma f \in X : f(z) \in X, H^\sigma f(0) = 0\}$ 那么 I_1 为 X_0 上的连续线性泛函,

令 $\bar{I}_1 : X \to C, \bar{I}_1(g) = I_1(g(z) - g(0))$. 由此容易推出 $\bar{I}_1$ 为 X 上的连续泛函,在 X_0 上

$\bar{I}_1 = I_1$,故

$$J(p_\varepsilon) = J(p_0) + \bar{I}_1(p_0, g)\varepsilon + o(\varepsilon) \tag{3.4.8}$$

由(3.3.8)式可知,J 在 p_0 相对于 P 具有 *Frêchet* 导数 $\bar{I}_1$.

(2) 证明 $\bar{I}_1$ 在 P 上不为常数: 设 $\forall p\in P$, 有 $\bar{I}_1(p)=c$ (c 为常数),由于 1 和 $1+z^n$ 均属于 P,可得 $\bar{I}_1(z^n)=0$, 即 $I(H^\sigma f_0,A)=0$. 设 I 由序列 $\{b_n\}$ 所决定,即对任意 $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\in X$, 有 $I(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_na_n$, 其中 $\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{1/n}<1$.令

$$g(z)=\frac{1}{\mu}zp_0^{\mu-1}\left(\frac{z^n}{H^\sigma f_0}\right)'\quad(n\geq 2),\tag{3.4.9}$$

则 $A(H^\sigma f_0,g)=z^n$, 这时 $I(H^\sigma f_0,A)=b_n\quad(n\geq 2)$.这说明 I 具形式

$$I(H^\sigma f_0(z),h)=b_0h(0)+b\,h'(0),$$

与定理假设矛盾,故 $\bar{I}_1$ 在 P 上不为常数.

(3) 证明 p_0 具有形式

$$p_0=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{1+x_kz}{1-x_kz}.\tag{3.4.10}$$

其中 $m\in N;\lambda_k>0,\sum_{k=1}^{m}\lambda_k=1;|x_k|=1,x_k$ 互不相同, $k=1,2,\cdots,m.$ 事实上,对 $\forall p\in P,\forall\varepsilon>0$, 有 $p_0(1-\varepsilon)+p\varepsilon\in P$, 即 $p_\varepsilon=p_0+(p-p\quad)\varepsilon$ 为 p_0 的一个变分.因 J 在 p_0 具有 *Frêchet* 导数 $\bar{I}_1$.故

$$J(p_\varepsilon)=J(p_0)+I(p-p_0)\varepsilon+o(\varepsilon)(\varepsilon\to 0).$$

从假设 $\operatorname{Re}J(p_0)=Max\{\operatorname{Re}J(p):p\in P\}$. 得 $\operatorname{Re}J(p_\varepsilon)\leq\operatorname{Re}J(p_0)$.即

$$\operatorname{Re}(\bar{I}_1(p-p_0)+o(1))\leq 0.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 则有 $\operatorname{Re}\bar{I}_1(p_\varepsilon)\leq\operatorname{Re}\bar{I}_1(p_0)$.由此推出 $p_0\in SuppP$, p_0 具有形式(3.4.10).

由(3)及 $Max\{\text{Re}(H^\sigma f): f(z)\in A'(\sigma,\alpha,\beta,\mu)\} = Max\{\text{Re}\, J(p): p\in P\}$, 得 p_0 具有形式 (3.4.10). 由 G 得对应关系知 $H^\sigma f_0$ 具有形式

$$H^\sigma f_0 = z(1-z)^{1-\alpha}\exp\left\{\int_0^z \frac{\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{1+x_k z}{1-x_k z}\right)^\mu -1+\beta}{z} dz\right\}. \tag{3.4.11}$$

再由 M 算子的对应关系和 $A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$ 与 $A'(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$ 之间的函数关系可知 f_0 具有形式（3.4.4）. 证毕.

推论 3.4.3 $A(\sigma,\alpha,\beta,\mu)$ 的支撑点具有形式(3.4.4).

注: 当 $\sigma=0,\alpha=1,\beta=0,\mu=1$ 时,定理 3.4.2 即为 Humme 的结果.

用相同的方法得到

定理 3.4.4 设 L 为 $G(\alpha,\beta,\mu)$ 上的连续泛函, $S_0(z)\in G(\alpha,\beta,\mu)$ 且 $R_e S_0(z)=\max\{R_e L(S(z)): S(z)\in G(\alpha,\beta,\mu)\}$. 若 L 在 $S_0(z)$ 相对于 $G(\alpha,\beta,\mu)$ 具有 $Fr\hat{e}chet$ 导数 I, I 不具有形式

$$I(S_0(z),h(z)) = ah(0)+bh'(0)(a,b\in C) (\text{C 为常数}),$$

则

$$S_0(z) = (1-z)^{1-\alpha}\exp\left\{\int_0^z \frac{\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{1+x_k z}{1-x_k z}\right)^\mu - \frac{1}{2}(1-\beta)}{z} dz\right\}. \tag{3.4.12}$$

其中 $m\in N;\lambda_k>0,\sum_{k=1}^m \lambda_k=1;|x_k|=1, x_k$ 互不相同, $k=1,2,\cdots,m$.

推论 3.4.4 $G(\alpha,\beta,\mu)$ 的支撑点具有形式（3.4.12）.

用函数族 $A(\lambda,\alpha,\beta)$ 和 $J(\lambda,\alpha,\beta)$ 相同的方法还可以得到

定理 3. 4. 5 函数 $S(z)\in G(\alpha,\beta,1)$ 当且仅当 $X=\{x:|x|=1\}$ 上的概率测度 $\mu(x)$, 使得

$$S(z)=(1-z)^{1-\alpha}\exp\left[-(1-\beta)\int_{|x|=1}\log(1-xz)d\mu(x)\right], \tag{3.4.13}$$

对于固定的$\alpha,\beta,G(\alpha,\beta,1)$ 与 X 上的概率测度$\{\mu\}$以关系式(3. 4. 13)构成一一对应.

推论 3. 4. 5 若$S(z)\in G(\alpha,\beta,1)$，则

$$\frac{S(z)}{(1-z)^{1-\alpha}}\prec\frac{1}{(1-z)^{(1-\beta)}}$$

定理 3. 4. 6 设$S(z)\in G(\alpha,\beta,1)$，则有

$$\left[\frac{S(z)}{(1-z)^{1-\alpha}}\right]^{\eta}\prec\frac{1}{(1-z)^{\eta(1-\beta)}},z\in D. \tag{3. 4. 14}$$

其中 $0<\eta(1-\beta)\le 1$.该结果为最佳的.

推论 3. 4. 6 设$S(z)\in G(\alpha,\beta,1)$，则有

$$\mathrm{Re}\left[\frac{S(z)}{(1-z)^{1-\alpha}}\right]^{\eta}>\frac{1}{2^{\eta(1-\beta)}},z\in D. \tag{3. 4. 15}$$

其中 $0<\eta(1-\beta)\le 1$.该结果为最佳的.

注 ：推论 3. 4. 6 中$\alpha=0$时，就得到β级 Robertson 函数的准确实部不等式.

§3. 5 有关近于凸函数的解析函数类

本节中我们引进并讨论有关近于凸函数的解析函数$\mathrm{B}_\lambda(\alpha,\beta)$的性质[22]-[24]：

1. 有关的定义

设 $\lambda>-1,0\le\alpha<1,0\le\beta<1$. 令

$$\mathrm{S}(\alpha)=\left\{f(z)\in A:\mathrm{Re}\frac{f(z)}{z}>\alpha,z\in D\right\}$$

$$C(\alpha,\beta)=\left\{f(z)\in A:\exists g(z)\in S(\alpha).\text{使}\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{g(z)}>\beta,z\in D\right\}.$$

显然$C(\alpha,\alpha)$为α级近于凸函数.

定义 3.5.1 若函数$f(z)\in A$,满足条件

$$\operatorname{Re}\frac{D^{\lambda}f(z)}{z}>\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1},z\in D,\lambda\geq\max\{-\alpha,-\beta\}. \quad (3.5.1)$$

则称$f(z)\in S_{\lambda}(\alpha)$.显然$f(z)\in S_{\lambda}(\alpha)\Leftrightarrow D^{\lambda}f(z)\in S\left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)$, $S_0(\alpha)=S(\alpha)$

定义 3.5.2 设函数$f(z)\in A$,若存在$g(z)\in S_{\lambda}(\alpha)$,满足条件

$$\operatorname{Re}\frac{z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}g(z)}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1},\lambda\geq\max\{-\alpha,-\beta\},z\in D. \quad (3.5.2)$$

则称$f(z)\in B_{\lambda}(\alpha,\beta)$.显然$B_0(\alpha,\beta)=B(\alpha,\beta)$.

容易验证 当$0\leq\alpha_1<\alpha_2<1,\ 0\leq\beta_1<\beta_2<1$,则$B(\alpha_2,\beta_2)\subset B(\alpha_1,\beta_1)$.

利用算子$L(\alpha,c)$的性质，将（3.5.2）式改写成

$$\operatorname{Re}\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{L(\lambda+1,1)g(z)}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1},\lambda\geq\max\{-\alpha,-\beta\},z\in D. \quad (3.5.3)$$

2. 积分表达式

若$g(z)\in S_{\lambda}(\alpha)$,则由$P$中函数的*Herglots*表示公式定理 2.1.5，容易得到.

定理 3.5.1 函数$g(z)\in S_{\lambda}(\alpha)$,则存在$X=\{x:|x|=1\}$上左连续的概率测度$\gamma(x)$,使得

$$g(z)=L(1,\lambda+1)\left\{z\int_{|x|=1}\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}d\gamma(x)\right\}.$$

定理 3.5.2 函数$f(z)\in B_{\lambda}(\alpha,\beta)$.当且仅当$X=\{x:|x|=1\}$上左连续的概率测度$\mu(x),\gamma(x)$，使得

$$f(z)=L(1,\lambda+1)\left\{\int_0^z\left[\int_{|x|=1}\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}d\mu\left(x\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1})xz}{1-xz}d\gamma(x)\right)\right]dz\right\},$$

（3.5.4）

特别当$\lambda>0$时

$$f(z)=\int_0^1u^{-1}\left[\int_0^{uz}\left\{\int_{|x|=1}\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}d\mu(x).\int_{|x|=1}\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}d\gamma(x)\right\}dz\right]d\eta(1,u)(u),$$

（3.5.5）

其中η是B分布，由$L(a,c)$的性质当，$\lambda=0$时，

$$f(z)=\int_0^z\left\{\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz}d\mu(x)\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\alpha)xz}{1-xz}d\gamma(x)\right\}dz, \qquad (3.5.6)$$

对于固定的$\lambda,\alpha,\beta,B_\lambda(\alpha,\beta)$与$X$上的概率测度点$\{(\mu,\gamma)\}$，以关系式（3.5.4）构成一一对应.

证 设$f(z)\in B_\lambda(\alpha,\beta)$,则$g(z)\in S_\lambda(\alpha)$.使得

$$\mathrm{Re}\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{L(\lambda+1,1)g(z)}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1},z\in D\cdot$$

由定理3.5.1和P中函数的$He\gamma glots$表示公式（定理2.1.5）

$$\frac{L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)}{L(\lambda+1,1)g(z)}=\int_{|x|=1}\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}d\mu(x)$$

由此推出

$$L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z)=\int_{|x|=1}d\mu(x)\cdot\int_{|x|=1}\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}d\gamma(x).$$

由此推出（3.5.4）式成立.

反之，亦然，当$\lambda>0$时，利用$L(a,c)$算子的积分表达式，从（3.5.4）得到

（3.5.5）式；当 $\lambda=0$ 时，$L(1,1)$ 是单位算子，此时（3.5.4）式变为（3.5.6）式，对于固定的 λ,α,β, 由于 $\{(\mu,\gamma)\}$ 与 $P\times P$ 之间构成一一对应，而 $P\times P$ 与 $B_\lambda(\alpha,\beta)$ 也是一一对应. 这表明定理得后一个论为真，定理 3.5.2 证毕.

3. 包含关系

由从属关系和 Schwarz 引理容易证明

引理 3.5.1 设 $p(z)\in P(\alpha)(0\le\alpha<1), z\in D$, 则

$$\left|\frac{zp'(z)}{p(z)}\right|\le\frac{2(1-\alpha)|z|}{(1-|z|)[1-(1-2\alpha)|z|]}. \tag{3.5.7}$$

定理 3.5.3 设函数 $f(z)\in B_\lambda(\alpha,\beta)$, 则 $L(\lambda+1,1)f(z)$ 在 $|z|<r_1$ 内是近于凸的；其中 r_1 是方程

$$1-2r-\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)r^2=0. \tag{3.5.8}$$

的最小正根.

证 设 $f(z)\in B_\lambda(\alpha,\beta)$, 则存在 $g(z)\in S_\lambda(\alpha)$, 使

$$\mathrm{Re}\frac{z(L(\lambda+1,1)f(z))'}{L(\lambda+1,1)g(z)}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}.$$

要证明 $L(\lambda+1,1)f(z)$ 在 $|z|<r_1$ 内近于凸，只要证明 $L(\lambda+1,1)g(z)$ 在 $|z|<r_1$ 内星象即可.令 $p(z)=\frac{L(\lambda+1,1)g(z)}{z}$, 则 $p(z)$ 在 D 内解析且 $\mathrm{Re}\,p(z)>\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}$, 由引理 3.5.1，得

$$\mathrm{Re}\frac{z(L(\lambda+1,1)g(z))'}{L(\lambda+1,1)g(z)}=1-\mathrm{Re}\frac{zp'(z)}{p(z)}\ge1-\left|\frac{zp'(z)}{p(z)}\right|\ge\frac{1-2r-\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)r^2}{(1-r)\left[1-\left(1-\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)r\right]}$$

令$\varphi(r)=1-2r-\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)r^2$，则$\varphi(r)$在$[0,1]$上连接，且$\varphi(0)=1>0$，

$\varphi(1)=-2\left(1-\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)<0$，从而（3.5.8）在$(0,1)$内是星象的，由此推出$L(\lambda+1,1)f(z)$在

$|z|<r$内是近于凸的，定理 3.5.3 证毕.

推论 3.5.1 若$f(z)\in B_\lambda(\alpha,\beta)$，则$f(z)$在$|z|<r_1$是近于凸的，其中$r_1$是方程（3.5.8）的最小正根.

定理 3.5.4 设$\max\{-\alpha,-\beta\}\le\lambda_1,\le\lambda_2$，则$S_{\lambda_2}(\alpha)\subset S_{\lambda_1}(\alpha)$.

证 在$S_\lambda(\alpha)$上定义算子$T_\lambda:T_\lambda(f)=L(\lambda+1,1)f(z)$，则$T_\lambda$是$S_\lambda(\alpha)$到$S\left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)$的线性同胚，故$\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}$是关于$\lambda$的单调增加函数，且$S\left(\frac{\lambda_2+\alpha}{\lambda_2+1}\right)\subset S\left(\frac{\lambda_1+\alpha}{\lambda_1+1}\right)$.再根据$T_\lambda$的映射性质得$S_{\lambda_2}(\alpha)\subset S_{\lambda_1}(\alpha)$. 证毕.

推论 3.5.1 若$\lambda>0$，则$S_\lambda(\alpha)\subset S(\alpha)$.

定理 3.5.5 设$\max\{-\alpha,-\beta\}\le\lambda_1,\le\lambda_2$，则$B_{\lambda_2}(\alpha,\beta)\subset B_{\lambda_1}(\alpha,\beta)$.

证 在$B_\lambda(\alpha,\beta)$上定义算子$T_\lambda:T_\lambda(f)=L(\lambda+1,1)f(z)$，由（3.5.4）式可知$f(z)\in B_\lambda(\alpha,\beta)$当且仅当存在$g(z)\in S_\lambda(\alpha)$.即存在$L(\lambda+1,1)g(z)\in S\left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)$，使得$L(\lambda+1,1)f(z)\in B\left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1},\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$，所以$T_\lambda$是$B_\lambda(\alpha,\beta)$到$B\left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1},\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$的一个线性同胚，又因$\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1},\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}$均为关于$\lambda$的单调增加函数，因此$B\left(\frac{\lambda_2+\alpha}{\lambda_2+1},\frac{\lambda_2+\beta}{\lambda_2+1}\right)\subset B\left(\frac{\lambda_1+\beta}{\lambda_1+1}\right)$，在由$T_\lambda$算子的映射性质和定理 3.5.4 可知，$B_{\lambda_2}(\alpha,\beta)\subset B_{\lambda_1}(\alpha,\beta)$. 证毕.

推论 3.5.2 设$\lambda>0$，则$B_\lambda(\alpha,\beta)\subset B(\alpha,\beta)$.

4. 端点性质及偏差定理

由定义 3.13 和定义 3.1.4，用$\overline{co}F$记为集合F的凸闭包，F的端点，端点的全

体记为 $extF$.

定理 3.5.6 $\forall f(z)\in B_\lambda(\alpha,\beta)$ 有端点的积分表示

$$f(z)=L(1,\lambda+1)\int_{X\times T}\left[\int_0^z\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}\cdot\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}dz\right]d\mu(\theta,\varphi),\quad(3.5.9)$$

其中 $x=e^{i\varphi},y=e^{i\theta},X=Y=\left\{e^{i\theta}:0\le\theta\le 2\pi\right\},\mu(\theta,\varphi)$ 为二元左连续的概率测度.

证 设 $B_\lambda^{'}(\alpha,\beta)=\left\{\left(L(\lambda+1,1)f(z)\right)^{'}:f(z)\in B_\lambda(\alpha,\beta)\right\}$, 由求导运算的线性性质和 $L(a,c)$ 算子的映射性质，我们把问题转化为对函数族 $B_\lambda^{'}(\alpha,\beta)$ 的讨论.

令
$$g_{x,y}=\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}\cdot\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)yz}{1-yz},|x|=|y|=1,$$

$$M=\left\{\int_{X\times Y}g_{x,y}(z)\,d\mu(\theta,\varphi):\mu(\theta,\varphi)\text{左连续的概率测度}\right\}.$$

由假设容易证明包含关系 $M\subseteq\overline{co}\left(B_\lambda^{'}(\alpha,\beta)\right)$. 另外，假设对任意左连续的概率测度，有

$$\int_{X\times Y}g_{x,y}(z)\,d\mu_1(\theta,\varphi)=\int_{X\times Y}g_{x,y}(z)\,d\mu_2(\theta,\varphi),\qquad(3.5.10)$$

由于 $g_{x,y}(z)$ 关于 x,y 分离形式，因此

$$\mu_i(\theta,\varphi)=\mu_i^{(1)}(\theta)\cdot\mu_i^{(2)}(\varphi)\,(i=1,2).$$

可唯一分解成两个独立的左连续的概率测度乘积，这样（3.5.10）式可化为

$$\int_X\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}d\mu_1^{(1)}(\theta)\int_Y\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)yz}{1-yz}d\mu_1^{(2)}(\varphi)$$

$$=\int_X\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}d\mu_2^{(1)}(\theta)\int_Y\frac{1+\left(1-2\dfrac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)yz}{1-yz}d\mu_2^{(2)}(\varphi).\qquad(3.5.11)$$

且唯一的.因此有 $\mu_1^j=\mu_2^{(j)}\,(j=1,2)$. 即 $\mu_1(\theta,\varphi)=\mu_2(\theta,\varphi)$, 由此可知 M 在 $\mu(\theta,\varphi)$

的表示下唯一的，又根据 $g_{x,y}(z)$ 关于 x,y,z 的连续性，得到

$$extM=\left\{\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}\cdot\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)yz}{1-yz}:|x|=|y|=1\right\}. \tag{3.5.12}$$

又因 $f(z)\in B_\lambda'(\alpha,\beta)$, 所以 $\exists g(z)\in S_\lambda(\alpha)$, 即存在

$$L(\lambda+1,1)g(z)\in S\left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right),$$

使得

$$\left(L(\lambda+1,1)f(z)\right)'=\int_X\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}d\mu(\theta)\int_Y\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)yz}{1-yz}d\gamma(\varphi)$$

$$=\int_{X\times Y}\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}\cdot\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)Yz}{1-Yz}d\mu(\theta,\varphi)\in M.$$

即 $B_\lambda'(\alpha,\beta)\subseteq M, M=\overline{co}B_\lambda'(\alpha,\beta)$, 再利用 $B_\lambda(\alpha,\beta)$ 与 $B_\lambda'(\alpha,\beta)$ 中函数关系得到（3.5.9）式. 证毕.

从定理 3.5.6 得到

定理 3.5.7 若 $f(z)\in B_\lambda(\alpha,\beta)$, 则 $|z|=r<1$ 时，有

$$L(\lambda+1,1)\frac{\left[1-\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)r\right]\left[1-\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)r\right]}{(1+r)^2}\le|f'(z)|$$

$$\le L(1,\lambda+1)\frac{\left[1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)r\right]\left[1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)r\right]}{(1-r)^2}$$

$$L(1,\lambda+1)\int_0^r\frac{\left[\left(1-\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)r\right)\right]\left[1-\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)r\right]}{(1+r)^2}dr\le|f(z)|$$

$$\le L(1,\lambda+1)\int_0^r\frac{r\left[\left(1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)r\right)\right]\left[1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)r\right]}{(1-r)^2}$$

其极值函数为

$$f(z)=L(1,\lambda+1)\int_0^z \frac{\left[1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz\right]\left[1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)xz\right]}{(1-xz)^2}dz. \qquad (*)$$

5. 系数不等式

从推论 2.1.2　容易证明

引理 3.5.2 若 $p(z)=1+p_1z+\cdots\in p(\alpha),|p_n|\le 2(1-\alpha)(n=1,2,\cdots)$.

引理 3.5.3 设 $g(z)=z+b_2z^2+\cdots\in S_\lambda(\alpha)$, 则

$$|b_n|\le 2\left(1-\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\lambda+n)}(n=2,3,\cdots). \qquad (3.5.13)$$

设 $g(z)\in S_\lambda(\alpha)$, 则 $\mathrm{Re}\frac{L(\lambda+1,1)g(z)}{z}>\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}$, 令

$$\frac{L(\lambda+1,1)g(z)}{z}=P(z). \qquad (3.5.14)$$

则 $\mathrm{Re}\,p(z)>\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}$, 把 $p(z)$ 和 $L(\lambda+1,1)g(z)$ 的幂级数的展开式

$$L(\lambda+1,1)g(z)=z+(\lambda+1)b_2z^2+\cdots+\frac{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)}{(n-1)}b_nz^{n+\cdots}$$

代入到（3.5.14）式中，并此较 z 的同次幂项系数，再利用引理 3.5.2 而得（3.5.13）式. 证毕.

定理 3.5.8 设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in B_\lambda(\alpha,\beta)$, 则

$$|a_n|\le\frac{2[1-\beta+(2n-3)(1-\alpha)]}{n(\lambda+1)}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\lambda)}(n=2,3,\cdots). \qquad (3.5.15)$$

极值函数由（ * ）式确定.

证 设 $f(z)\in B_\lambda(\alpha,\beta)$, 则存在 $g(z)\in S_\lambda(\alpha)$, 使得

$$\mathrm{Re}\frac{z(L(\lambda+1,1)f(z))'}{L(\lambda+1,1)g(z)}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1},$$

置

$$\frac{z\left(L(\lambda+1,1)f(z)\right)'}{L(\lambda+1,1)g(z)}=p(z),z\in D. \tag{3.5.16}$$

则 $\operatorname{Re}p(z)>\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}$, 把 $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$ 和 $L(\lambda+1,1)f(z),L(\lambda+1,1)g(z)$ 的幂级数展开式代入（3.5.16）式，并此较 z 的同次幂的系数得

$$n\sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda+m}{m}\right)|a_n|\le\sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda+m}{m}\right)|b_n|+\sum_{k=2}^{n-1}\left[\sum_{m=1}^{k-1}\left(\frac{\lambda+m}{m}\right)|b_k||p_{n-k}|\right]+|p_{n-1}|.$$

在和用引理 3.5.2 和引理 3.5.3 而得（3.5.15）式.且极值函数由 $(*)$ 式确定. 证毕.

推论 3.5.3 若 $f(z)\in B(\alpha,\beta)$, 则

$$|a_n|\le\frac{2}{n}\left[1-\beta+(2n-3)(1-\alpha)\right](n=2,3,\cdots).$$

极值函数由 $(*)$ 式确定.

我们用 $B_\lambda(\alpha,\beta)$ 相同的方法可以得到如下两类函数的性质[23][24]：

定义 3.5.4 设 $f(z)\in A$, 若存在 $g(z)\in A(\lambda,0,\alpha)$, 使得

$$\operatorname{Re}\frac{z\left(D^\lambda f(z)\right)'}{D^\lambda g(z)}>\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1},\lambda\ge\max\{-\alpha,-\beta\},z\in D.$$

则称 $f(z)\in B(\lambda,\alpha,\beta)$.

定义 3.5.5 设 $\beta>0,0\le\beta\lambda+\alpha<1$, 对某个

$$g(z)\in Q_\lambda(\alpha,\beta)=\left\{f(z)\in A:\operatorname{Re}\frac{D^{\lambda+1}f(z)}{D^\lambda f(z)}>\frac{(1+\beta)\lambda+1}{\lambda+1}\right\},$$

满足条件

$$\operatorname{Re}\frac{z\left(D^\lambda f(z)\right)'}{D^\lambda g(z)}>\beta\lambda+\alpha,f(z)\in A,z\in D.$$

则称 $f(z)\in C(\lambda,\alpha,\beta)$.

这里只列出函数类 $B(\lambda,\alpha,\beta)$ 的性质，相同的方法可以得到函数类 $C(\lambda,\alpha,\beta)$ 中

函数的性质，这里不叙述，详见文[23][24].

定理 3.5.9 $f(z)\in B(\lambda,\alpha,\beta)\Leftrightarrow \exists\mu(x),\gamma(x)\in X=\{X:|x|=1\}$, 使得

$$f(z)=L(1,\lambda+1)L(1,2)\left\{z(1-z)\int_{|x|=1}\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz}{1-xz}d\mu(x)\cdot\right.$$

$$\left.\exp\left\{-2\left(1-\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)\int_{|x|=1}\log(1-xz)d\gamma(x)\right\}\right.$$

当$\lambda=0$时，有

$$f(z)=\int_0^z\left\{(1-u)\cdot\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2<\beta)xu}{1-xu}d\mu(x)\cdot\exp\left[-2(1-\alpha)\int_{|x|=1}\log(1-xu)d\mu(x)\right]\right\}du$$

对于固定的$\lambda,\alpha,\beta,B(\lambda,\alpha,\beta)$与$X\times X$上的概率测度点$\{(\mu,\gamma)\}$以第一个表达式构成一一对应.

定理 3.5.10 $f(z)\in B(\lambda,\alpha,\beta)\Leftrightarrow\int_0^z\frac{z(L(\lambda+1,1)f(z))'}{1-z}dz\in C\left(\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1},\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$

定理 3.5.11 设$\lambda_2>\lambda_1>\max\{-\alpha,-\beta\}$,则$B(\lambda_2,\alpha,\beta)\subset B(\lambda_1,\alpha,\beta)$.

定理 3.5.12 $f(z)\in B(\lambda,\alpha,\beta)\Leftrightarrow L(\lambda+1,1)f(z)\in C\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1},\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)$, 其中$0\le\lambda<1-2\alpha,0\le\alpha<\frac{1}{2}$.

定理 3.5.13 $f(z)\in B(\lambda,\alpha,\beta)$有端点积分表式

$$f(z)=L(1,\lambda+1)\int_{X\times Y}\left[\int_0^z\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xu}{1-xu}\cdot\frac{(1-u)du}{(1-yu)^{2\left(1-\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)}}\right]du(\theta,\varphi).$$

其中 $x=e^{i\varphi},g=e^{i\theta},X=Y=\{e^{i\theta}:0\le\theta\le2\pi\},\mu(\theta,\varphi)$为二元连续的概率测度.

定理 3.5.14 若$f(z)\in B(\lambda,\alpha,\beta)$，则

$$L(1,\lambda+1)\frac{(1-r)\left[1-\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)r\right]}{(1+r)^{2\left(1-\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)+1}}\le|f(z)|\le L(1,\lambda+1)\frac{(1+r)\left[1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)r\right]}{(1-r)^{2\left(1-\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)+1}}$$

$$L(1,\lambda+1)\int_0^r\frac{(1-r)\left[1-\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)r\right]}{(1+r)^{2\left(1-\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)+1}}dr\le|f'(z)|\le L(1,\lambda+1)\int_0^r\frac{(1+r)\left[1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)r\right]}{(1-r)^{2\left(1-\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)+1}}$$

极值函数为

$$f(z)=L(1,\lambda+1)\int_0^z\frac{(1-xz)\left[1+\left(1-2\frac{\lambda+\beta}{\lambda+1}\right)xz\right]}{(1-xz)^{2\left(1-\frac{\lambda+\alpha}{\lambda+1}\right)+1}}dz.$$

§ 3.6 用 D^λ 算子定义的缺系数的解析函数类

本节中引进函数类 $Q_{K,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$，讨论其极值问题.[25] 导出 $Q_{K,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$ 中函数的积分表达式;借助算子理论建立该类中函数的偏差定理，给出类中函数的近凸半径,讨论类中函数 Hadamard 乘积性质.

1. 函数类 $Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$ 的定义

假设本节中出现的参数 $\lambda,\alpha,\beta,\rho$ 均满足: $\lambda>-1, 0\le\alpha, 0\le\beta<1, 0\le\rho<1$.

设 A_k $(k=1,2,\cdots)$ 表示在单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内解析函数 $f(z)=z+a_{k+1}z^{k+1}+\cdots$ 的全体构成的类. 以 $P_k(\beta)$ 表示在 D 内解析并满足 $\mathrm{Re}\,p(z)>\beta$ 的所有函数 $p(z)=1+p_kz^k+\cdots$ 所成的类. $S_k^*(\beta),K_k(\beta),C_k(\beta)$ 分别表示 A_k 中的 β 级星象函数类, β 级凸象函数类和 β 级近于凸函数类.

给定实数 $\lambda>-1$, 用

$$D^{\lambda} f(z)=\frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} * f(z), f(z) \in A_k \tag{3.6.1}$$

定义算子D^{λ},其中$*$表示 Hadamard 卷积，$D^{\lambda} f(z)$有如下性质:

$$D^{\lambda} f(z)=z+\frac{(\lambda+1) \cdots(\lambda+k-1)}{(k-1)!} a_k z^k+\cdots, \tag{3.6.2}$$

$$z(D^{\lambda} f(z))'=(\lambda+1)\ D^{\lambda+1} f(z)-\lambda D^{\lambda} f(z) \tag{3.6.3}$$

下面要定义函数类

定义 3.6.1 若函数$f(z) \in A_k$满足条件

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha) \frac{D^{\lambda} f(z)}{z}+\alpha(D^{\lambda} f(z))'\right\}>\beta, z \in U. \tag{3.6.4}$$

则称$f(z)$属于$V_{k,\lambda}(\alpha, \beta)$中.

定义 3.6.2 若存在$g(z) \in V_{k,\lambda}(\alpha, \beta)$,使得函数$f(z) \in A_k$满足条件

$$\operatorname{Re} \frac{z(D^{\lambda} f(z))'}{D^{\lambda} g(z)}>\rho, z \in U. \tag{3.6.5}$$

则称$f(z)$属于$Q_{K,\lambda}(\alpha, \beta, \rho)$中. $\lambda=0, \lambda=1$时还得到函数类:

$$Q_{K,0}(\alpha, \beta, \rho)=\left\{f(z) \in A_k: \exists g(z) \in V_{k,0}(\alpha, \beta), \operatorname{Re} \frac{z f'(z)}{g(z)}>\rho, z \in U\right\};$$

$$Q_{K,1}(\alpha, \beta, \rho)=\left\{f(z) \in A_k: \exists g(z) \in V_{k,1}(\alpha, \beta), \operatorname{Re} \frac{(z f'(z))'}{g'(z)}>\rho, z \in U\right\}.$$

利用算子$L(a, c)$的性质,可将(3.6.5)式写成

$$\operatorname{Re} \frac{L(2,1) L(\lambda+1,1) f(z)}{L(\lambda+1,1) g(z)}>\rho, z \in D. \tag{3.6.6}$$

2. 积分表达式

设 $g(z)\in V_{k,\lambda}(\alpha,\beta)$,容易验证存在 $p(z)=1+p_kz^k+\cdots\in P_k(\beta)$,使得

$$g(z)\in V_{k,\lambda}(\alpha,\beta)\Leftrightarrow zp(z)=L(1/\alpha,1/\alpha+1)(L(\lambda+1,1)g(z))$$
$$\Leftrightarrow L(1,\lambda+1)g(z)=L(1/\alpha,1/\alpha+1)[zp(z)].$$

再从正实部函数的 Herglotz 公式定理 2.1.5，结合算子 $L(\lambda+1,1)$ 的可逆性，不难证明：

定理 3.6.1 若 $g(z)\in V_{k,\lambda}(\alpha,\beta)$,则存在 $X=\{x:|x|=1\}$ 上的概率测度 $\eta(x)$,使得

$$g(z)=L(1,\lambda+1)\left\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\left[\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)tx}{1-tx}d\eta(x)\right]dt\right\}. \qquad (3.6.7)$$

或存在 $p(z)\in P_k(\beta)$.使得

$$g(z)=L(1,\lambda+1)\left\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}p(t)dt\right\}$$

对于固定的 λ,α,β,$V_{k,\lambda}(\alpha,\beta)$ 与 X 上的概率测度点 $\eta(x)$ 以上述关系式（3.6.7）构成一一对应.

定理 3.6.2 函数 $f(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$ 当且仅当存在 $X=\{x:|x|=1\}$ 上的概率测度 $\eta(x),\mu(x)$,使得

$$f(z)=L(1,\lambda+1)L(1,2)\left\{\left[\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)tx}{1-tx}d\eta(x)\right)dt\right]\left[\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\rho)tx}{1-tx}d\eta(x)\right]\right\} \qquad (3.6.8)$$

当 $\lambda=0$ 时，

$$f(z)=L(1,2)\left\{\left[\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)tx}{1-tx}d\eta(x)\right)dt\right]\left[\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\rho)tx}{1-tx}d\mu(x)\right]\right\} \qquad (3.6.9)$$

对于固定的 $\lambda,\alpha,\beta,\ \rho$,$Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\ \rho)$ 与 X 上的概率测度点 $\{(\eta(x),\mu(x))\}$ 以上述关系式

(3.6.8)构成一一对应.

证 设$f(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$,则存在$g(z)\in V_{k,\lambda}(\alpha,\beta)$,使得

$$\operatorname{Re}\frac{z(L(\lambda+1,1)f(z))'}{L(\lambda+1,1)g(z)}>\rho, z\in U.$$

由定理 3.6.1,可得

$$g(z)=L(1,\lambda+1)\left\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\left[\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)tx}{1-tx}d\eta(x)\right]dt\right\}, \tag{3.6.10}$$

其中$\eta(x)$为 X 上的左连续的概率测度.

由 P 中函数的 Herglots 表示公式定理 2.1.5，得

$$\frac{z(L(\lambda+1,1)f(z))'}{L(\lambda+1,1)g(z)}=\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\rho)xz}{1-xz}d\mu(x). \tag{3.6.11}$$

其中$\mu(x)$为 X 上的左连续的概率测度.

由(3.6.10),(3.6.11)两式推出

$$L(1,2)L(1,\lambda+1)f(z)=\left\{\left[\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)tx}{1-tx}d\eta(x)\right)dt\right]\left[\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\rho)zx}{1-zx}d\mu(x)\right]\right\}$$

利用$L(\lambda+1,1)$算子的可逆性,从上式即得(3.6.8)式,反之亦然;当$\lambda=0$时,(3.6.8)式变为(3.6.9)式. 对于固定的$\lambda,\alpha,\beta,\rho$,因$\{(\eta(x),\mu(x))\}$与$P\times P$之间构成一一对应,而$P_k\times P_k$与,$Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$之间也是一一对应,这表明定理的后一个结论为真.证毕.

3. 偏差定理

利用定理 2.1.7，不难证明

引理 3.6.1 设$p(z)=1+p_kz^k+\cdots P(0)(z\in U,k\ge1)$,则对$|z|=r<1$,有

$$\frac{1-r^k}{1+r^k}\le\operatorname{Re}p(z)\le\frac{1+r^k}{1-r^k}.$$

这结果是准确的.

若$\operatorname{Re}p(z)>\beta$,置$q(z)=p(z)-\beta$,则$\operatorname{Re}(p(z)-\beta)>0$,于是由引理 3.6.1 容易

推出:

引理 3.6.2 设$q(z)=1+q_k z^k+\cdots P_k(\beta)(z\in U,k\geq 1)$,则对$|z|=r<1$,有

$$\frac{1-(1-2\beta)r^k}{1+r^k}\leq \operatorname{Re} q(z)\leq \frac{1+(1-2\beta)r^k}{1-r^k}.$$

这结果是准确的.

定理 3.6.3 设$\alpha>0, f(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$,则对$|z|=r<1$,有

$$|f(z)|\geq L(1,\lambda+1)L(1,2)\left\{\frac{1-(1-2\rho)r^k}{\alpha(1+r^k)}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-2}\frac{1-(1-2\beta)(rt)^k}{1+(rt)^k}dt\right\}, \tag{3.6.12}$$

$$|f(z)|\leq L(1,\lambda+1)L(1,2)\left\{\frac{1+(1-2\rho)r^k}{\alpha(1-r^k)}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-2}\frac{1+(1-2\beta)(rt)^k}{1-(rt)^k}dt\right\}. \tag{3.6.13}$$

结论(3.6.12),(3.6.13)是准确的.

证 设$f(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$,则存在$g(z)\in V_{k,\lambda}(\alpha,\beta)$,使得

$$\operatorname{Re}\frac{z(L(\lambda+1,1)f(z))'}{L(\lambda+1,1)g(z)}>\rho, z\in U.$$

令$\dfrac{z(L(\lambda+1,1)f(z))'}{L(\lambda+1,1)g(z)}=q(z), z\in U$. 则$\operatorname{Re}q(z)>\rho$.下面分两步来证明:

(1) 首先证明$|L(\lambda+1,1)g(z)|$的偏差性质,因$g(z)\in V_{k,\lambda}(\alpha,\beta)$,存在$\operatorname{Re}p(z)>\beta$.由引理 3.6.2,有

$$|L(\lambda+1,1)g(z)|\geq \operatorname{Re}(L(\lambda+1,1)g(z))=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-2}\frac{1-(1-2\beta)(rt)^k}{1+(rt)^k}dt\right\}$$

$$>\frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1-(1-2\beta)t^k}{1+t^k}dt; \tag{3.6.14}$$

$$|L(\lambda+1,1)g(z)|=\left|\left\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-2}p(t)dt\right\}\right|\leq\frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-2}|p(zt)|dt$$

$$\leq\frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1+(1-2\beta)(rt)^k}{1-(rt)^k}dt \tag{3.6.15}$$

(2) 因为

$$z(L(\lambda+1,1)f(z))' = L(2,1)L(\lambda+1,1)f(z) = q(z)\cdot L(\lambda+1,1)g(z), z\in U.$$

且

$$|f(z)| = L(1,\lambda+1)L(1,2)|q(z)\cdot L(\lambda+1,1)g(z)|, z\in U. \quad (3.6.16)$$

由(3.6.14)(3.6.15)和引理 3.6.2 以及正实部函数的积分表达式,得到

$$\frac{1-(1-2\rho)r^k}{\alpha(1+r^k)}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-2}\frac{1-(1-2\beta)(rt)^k}{1+(rt)^k}dt \le |q(z)\cdot L(\lambda+1,1)g(z)|$$

$$\le \frac{1+(1-2\rho)r^k}{\alpha(1-r^k)}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-2}\frac{1+(1-2\beta)(rt)^k}{1-(rt)^k}dt$$

再利用(3.6.16)式即得(3.6.12),(3.6.13)式.等号对函数

$$f(z)=L(1,\lambda+1)L(1,2)\left\{\frac{1+(1-2\rho)z^k}{\alpha(1-z^k)z^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_0^z t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1+(1-2\beta)t^k}{1-t^k}dt\right\}. \quad (3.6.17)$$

分别在 $z = re^{i\frac{\pi}{k}}, z = r$ 时成立.

3. 近于凸半径

利用从属关系，进行对数导数运算结合 Schwarz 引理并注意 $|\omega(z)| \le |z|^k$ 不难证明如下引理

引理 3.6.3 设 $q(z)=1+q_k z^k+\cdots P_k(\beta)(z\in D, k\ge 1)$,则对 $|z|=r<1$,有

$$\left|\frac{zq'(z)}{q(z)}\right| \le \frac{2k(1-2\beta)r^k}{(1-r^k)[1+(1-2\beta)r^k]}$$

这结果是准确的.证明详见文[26].

定理 3.6.4 设 $\alpha>0, f(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$,则 $D^\lambda f(z)$ 在 $|z|=r<r_1$ 内是近于凸的.这里 r_1 是方程

$$1-2[m+k(1-m)]r^k-(1-2m)r^{2k}=0 \tag{3.6.18}$$

的最小正根,其中

$$m=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1-(1-2\beta)t^k}{1+t^k}dt.$$

证 设 $f(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$,我们要证明 $D^\lambda f(z)$ 为近于凸函数,只要证明 $D^\lambda g(z)$ 为星象函数即可.令 $F(z)=\frac{D^\lambda g(z)}{z^1}$,则 $F(z)$ 在 U 内解析,且因为 $g(z)\in V_{k,\lambda}(\alpha,\beta)$,所以存在 $p(z)\in P(\beta)$.由定理 3.6.1 和引理 3.6.2,可知

$$\operatorname{Re}\frac{L(\lambda+1,1)g(z)}{z}=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\alpha z^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}p(t)dt\right\}>m=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1-(1-2\beta)t^k}{1+t^k}$$

由 $F(z)=\frac{D^\lambda g(z)}{z}$,并利用引理 3.6.3,有

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z(D^\lambda g(z))'}{D^\lambda g(z)}\right\}=1+\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\}\geq 1-\left|\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|\geq\frac{1-2[m+k(1-m)]r^k-(1-2m)r^{2k}}{(1-r^k)[1+(1-2m)r^k]},$$

令 $\phi=1-2[m+k(1-m)]r^k-(1-2m)r^{2k}$,则 $\phi(r)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $\phi(0)=1>0$, $\phi(1)=-2k(1-m)<0$,从而方程在 $(0,1)$ 内有最小正根 r_1,因此 $|z|<r_1$ 时 $\operatorname{Re}\frac{z(D^\lambda g(z))}{D^\lambda g(z)}>0$, $D^\lambda g(z)$ 为星象函数,即 $D^\lambda f(z)$ 在 $|z|<r_1$ 内是近于凸象函数.证毕.

推论 3.6.1 设 $\alpha>0, f(z)\in Q_{k,0}(\alpha,\beta,\rho)$,则 $f(z)$ 在 $|z|=r<r_1$ 内是近于凸的.这里 r_1 是方程(3.6.18)的最小正根.

4. Hadamard 卷积

引理 3.6.4[27] 设 $\varphi(z), g(z)$ 在 U 内解析,满足 $\varphi(0)=h(0)=0$, $\varphi'(0)\neq 0$, $h'(0)\neq 0$,

并且对每个适合 $|\sigma|=|\tau|=1$ 的复数 σ,τ,有

$$\varphi(z)*\frac{1+\tau\sigma z}{1-\sigma z}h(z)\neq 0(0<|z|<1). \tag{3.6.19}$$

设 $F(z)$ 在 U 内解析,且 $\operatorname{Re} F(z) > 0(0<|z|<1)$, 则

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi * Fh(z)}{\varphi * h(z)}\right\} > 0(0<|z|<1). \qquad (3.6.20)$$

证 我们首先证明

$$\operatorname{Re}\frac{\varphi(z)*\frac{1+\tau\sigma z}{1-\sigma z}h(z)}{\varphi(z)*h(z)} > 0,(z\in D) \qquad (3.6.21)$$

设 （3.6.19）成立，则这时 $\tau=-1$ 这意味着 $\varphi(z)*h(z)\neq 0$， $0<|z|<1$.

令 $|\tau|=1$, 且 $\tau\neq -1$, 我们有

$$\varphi(z)*\frac{1+\tau\sigma z}{1-\sigma z}h(z)=\frac{1}{2}(1+\tau)\varphi(z)*\frac{1+\tau\sigma z}{1-\sigma z}h(z)+\frac{1}{2}(1-\tau)\varphi(z)*h(z)$$

由（3.6.19）

$$\operatorname{Re}\frac{\varphi(z)*\frac{1+\tau\sigma z}{1-\sigma z}h(z)}{\varphi(z)*h(z)} \neq -\frac{1-\tau}{1+\tau}\ (z\in D).$$

该式左端不能在虚轴上取值，但在 $z=0$. 处取 1 ，所以（3.6.21）成立.

讨论满足条件 $\operatorname{Re} F(z)>0(0<|z|<1)$, 的函数 $F(z)$，设 $|F(z)|=1$, 由 herglotz 公式

$$e^{-iy}F(z)=\int_T\frac{1+\xi\sigma z}{1-\sigma z}d\mu(\sigma). \qquad (3.6.22)$$

其中 μ 是单位圆 T 上的概率测度， ξ 和 e^{-iy} 是唯一确定的常数，

$$|\xi|=1,\xi\neq -1,\cos\gamma>0\left(w=e^{iy}(1+\xi z)/(1-z),z\in D,\operatorname{Re}w>0\right).$$

则

$$e^{-iy}(\varphi*Fh)(z)=\int_T\varphi(z)*h(z)\frac{1+\xi\sigma z}{1-\sigma z}d\mu(\sigma)$$
$$=\frac{1}{2}(1+\xi)\int_T\varphi(z)*h(z)\frac{1+\sigma z}{1-\sigma z}d\mu(\sigma)+\frac{1}{2}(1-\xi)(\varphi*h)(z)$$
$$=(\varphi(z)*h(z))\left\{\frac{1}{2}(1+\xi)\int_T H_\sigma d\mu(\sigma)+\frac{1}{2}(1-\xi)\right\}$$

其中 $H_{\sigma}(0)=1$，由（3.6.21），$\operatorname{Re}H_{\sigma}(z)>0$. 因此

$$e^{-iy}\frac{(\varphi*Fh)(z)}{(\varphi*h)(z)}=\frac{1}{2}(1+\xi)K(z)+\frac{1}{2}(1-\xi)$$

其中 $K(0)=1,\operatorname{Re}K(z)>0,$ 显然（3.6.20）成立.

定理 3.6.5 设 σ,τ 满足 $|\sigma|=|\tau|=1$ 的复数，$f(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$，$\varphi(z)=z+\sum_{n=k}^{\infty}\alpha_{k+1}z^{k+1}$ 在 D 内解析,且

$$\varphi(z)*\frac{1+\tau\sigma z}{1-\sigma z}z\neq 0(0<|z|<1)$$

则 $f*\varphi(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$.

证 首先，证明 $g*\varphi(z)\in V_{K,\lambda}(\alpha,\beta)$. 设

$$F(z)=(1-\alpha)\frac{D^{\lambda}g(z)}{z}+\alpha(D^{\lambda}g(z))'-\beta,$$

$h(z)=z$，则 $F(z)$ 在 D 内解析,且 $\operatorname{Re}F(z)>0(z\in U),\varphi*h(z)=z.$

由于

$$\begin{aligned}\varphi*Fh(z)&=\varphi(z)*\left[(1-\alpha)D^{\lambda}g(z)+\alpha z(D^{\lambda}g(z))'-\beta z\right]\\&=(1-\alpha)\varphi*D^{\lambda}g(z)+\alpha\varphi*z(D^{\lambda}g(z))'-\beta z\\&=(1-\alpha)D^{\lambda}(\varphi*g)(z)+\alpha z(D^{\lambda}(\varphi*g))'(z)-\beta z\end{aligned}$$

利用引理 3.6.4,得

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi*Fh(z)}{\varphi*h(z)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{D^{\lambda}(\varphi*g)(z)}{z}+\alpha(D^{\lambda}(\varphi*g))'(z)\right\}-\beta>0,$$

即

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{D^{\lambda}(\varphi*g)(z)}{z}+\alpha(D^{\lambda}(\varphi*g))'(z)\right\}>\beta(z\in U).$$

从而 $g*\varphi(z)\in V_{K,\lambda}(\alpha,\beta)$.

其次,证明$f*\varphi(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$.设$f(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$，令

$$p(z)=\frac{z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}g(z)}-\rho,h(z)=z,$$

则$p(z)$在D内解析,且$\operatorname{Re}p(z)>0(z\in U)$,$\varphi*h(z)=z$.由于

$$\varphi*D^{\lambda}g(z)\cdot p(z)=\varphi*z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'-\rho\varphi*D^{\lambda}g(z), \qquad (3.6.23)$$

注意到

$$\varphi*D^{\lambda}g(z)=D^{\lambda}(\varphi*g)(z);\varphi*z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'=z\left(D^{\lambda}(\varphi*f)\right)'(z)$$

由(3.6.19)式得到

$$\operatorname{Re}p(z)=\operatorname{Re}\left\{\frac{z\left(D^{\lambda}(\varphi*f)\right)'(z)}{D^{\lambda}(\varphi*g)(z)}\right\}>\rho.$$

由(1)可知$\varphi*g(z)\in V_{k,\lambda}(\alpha,\beta)$.故$f*\varphi(z)\in Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$. 证毕.

注 在定理 3.6.3 至定理 3.6.5 中分别取$\lambda=0,\lambda=1$时，就得到函数类$Q_{k,0}(\alpha,\beta,\rho)$和$Q_{k,1}(\alpha,\beta,\rho)$中函数的相应的性质.

还可以引进如下函数类，并用与类$Q_{k,\lambda}(\alpha,\beta,\rho)$相同的方法讨论其性质：

$$S_{\lambda}^{*}(\alpha)=\left\{f(z)\in S:D^{\lambda}f(z)\in S^{*}(\alpha)\right\};$$

定义 3.6.3 设$f(z)\in S$,若存在函数$g(z)=z+b_2z^2+\cdots\in S_{\lambda}^{*}(\alpha)$, $h(z)=z+c_2z^2+\cdots\in S_{\lambda}^{*}(\beta)$,使得

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z^2\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}g(z)\cdot D^{\lambda}h(z)}\right\}>\rho,z\in U. \qquad (3.6.24)$$

则称$f(z)$属于$S_{\lambda}(g(z),h(z);\alpha,\beta,\rho)$中.

定理 3.6.6 设$g(z)\in S_{\lambda}^{*}(\alpha),h(z)\in S_{\lambda}^{*}(\beta),1\leq\alpha+\beta<2$,则

$$\left(D^{\lambda}g(z)D^{\lambda}h(z)\right)/z\in S^{*}(\alpha+\beta-1).$$

证 由假设,可知

$$\operatorname{Re}\frac{z\left(D^{\lambda}g(z)\right)'}{D^{\lambda}g(z)}>\alpha, \quad \operatorname{Re}\frac{z\left(D^{\lambda}h(z)\right)'}{D^{\lambda}h(z)}>\beta$$

令 $F(z)=\left(D^{\lambda}g(z)D^{\lambda}h(z)\right)/z$, 通过对数导数得到

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{z\left(D^{\lambda}g(z)\right)'}{D^{\lambda}g(z)}+\frac{z\left(D^{\lambda}h(z)\right)'}{D^{\lambda}h(z)}-1$$

和

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{z\left(D^{\lambda}g(z)\right)'}{D^{\lambda}g(z)}\right\}+\operatorname{Re}\left\{\frac{z\left(D^{\lambda}h(z)\right)'}{D^{\lambda}h(z)}\right\}-1>\alpha+\beta-1.$$

由于 $0\le\alpha+\beta-1<1$, 由此推出 $F(z)=\left(D^{\lambda}g(z)D^{\lambda}h(z)\right)/z\in S^{*}(\alpha+\beta-1)$.

定理 3.6.7 设 $g(z)\in S_{\lambda}^{*}(\alpha), h(z)\in S_{\lambda}^{*}(\beta), 1\le\alpha+\beta<2$, 则

(1) $\left|b_2+c_2\right|\le\dfrac{2[1-(\alpha+\beta-1)]}{\lambda+1}$;

(2) $$\left|\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda+k}{k}b_n+(\lambda+1)\prod_{k=1}^{n-2}\frac{\lambda+k}{k}b_{n-1}c_2+\cdots+(\lambda+1)\prod_{k=1}^{n-2}\frac{\lambda+k}{k}b_2c_{n-1}+\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda+k}{k}c_n\right|$$
$$\le\frac{1}{(n-1)!}\prod_{m=2}^{n}[m-2(\alpha+\beta-1)], n\ge 3.$$

结果都是准确的. 极值函数为

$$F(z)=L(1,\lambda+1)\left\{z(1-z)^{-2(2-\alpha-\beta)}\right\}.$$

定理 3.6.8 设 $f(z)\in S_{\lambda}(g(z),h(z);\alpha,\beta,\rho), 1\le\alpha+\beta<2$, 则 $D^{\lambda}f(z)\in C(\alpha+\beta-1,\rho)$.

注: 设 $f(z)\in S_0(g(z),h(z);\alpha,\beta,\rho), 1\le\alpha+\beta<2$, 则 $f(z)\in C(\alpha+\beta-1,\rho)$.

定理 3.6.9 设 $f(z)\in S_{\lambda}(g(z),h(z);\alpha,\beta,\rho), 1\le\alpha+\beta<2$, 则

$$\left|a_2\right|\le\frac{2-\alpha-\beta}{(\lambda+1)^2}+\frac{1-\rho}{\lambda+1}; \tag{3.6.25}$$

$$\left|a_n\right|\le\frac{1}{(n-1)!n}\prod_{m=1}^{n-1}\frac{m}{\lambda+m}\prod_{m=2}^{n}(m-2(\alpha+\beta-1))+$$
$$\frac{2(1-\rho)}{n}\prod_{m=1}^{n-1}\frac{m}{\lambda+m}\left[1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k-1)!}\prod_{m=2}^{k}(m-2(\alpha+\beta-1))\right], \tag{3.6.26}$$

考虑函数

$$f_\lambda(z)=L(1,\lambda+1)L(1,2)\left\{\left(\frac{1+(1-2\delta_1)z}{1-\delta_1 z}\right)(1-\delta_2 z)^{-2(2-\alpha-\beta)}\right\}, \qquad (3.6.27)$$

其中 $|\delta_1|=|\delta_2|=1$. $f_\lambda(z)\in S_\lambda(g(z),h(z);\alpha,\beta,\rho)$, 且(3.6.25),(3.6.26)式的极值函数.

定理 3.6.10 函数 $f(z)\in S_\lambda(g(z),h(z);\alpha,\beta,\rho)\Leftrightarrow$ 存在 $X=\{x:|x|=1\}$ 上连续的概率测度 $\mu(x),\gamma(x)$,使得

$$f(z)=L(1,\lambda+1)L(1,2)\left\{z\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\rho)xz}{1-xz}d\mu(x)\cdot\exp\left[-2(2-\alpha-\beta)\int_{|x|=1}\log(1-xz)d\gamma(x)\right]\right\},$$

当 $\lambda=0$ 时,

$$f(z)=\int_0^z\left\{\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\rho)xu}{1-xu}d\mu(x)\cdot\exp\left[-2(2-\alpha-\beta)\int_{|x|=1}\log(1-xu)d\gamma(x)\right]\right\}du,$$

对于固定的 λ,α,β, $S_\lambda(g(z),h(z);\alpha,\beta,\rho)$ 与 X 上连续的概率测度点 $\{(\mu,\gamma)\}$ 以第一个关系式构成一一对应.

定理 3.6.11 任意函数 $f(z)\in S_\lambda(g(z),h(z);\alpha,\beta,\rho)$ 有端点积分表式

$$f(z)=L(1,\lambda+1)\int_{X\times Y}\left[\int_0^z\frac{1+(1-2\rho)xu}{1-xu}\cdot\frac{du}{(1-yu)^{2(2-\alpha-\beta)}}\right]d\mu(\theta,\varphi),$$

其中 $x=e^{i\varphi}, y=e^{i\theta}, X=Y=\{e^{i\theta}:0\le\theta\le 2\pi\}$, $\mu(\theta,\varphi)$ 为二元连续的概率测度.

定理 3.6.12 若 $S_\lambda(g(z),h(z);\alpha,\beta,\rho)$, $|z|=r<1$, 则

$$L(1,\lambda+1)\frac{[1-(1-2\rho)r]}{(1+r)^{2(2-\alpha-\beta)+1}}\le|f'(z)|\le L(1,\lambda+1)\frac{[1+(1-2\rho)r]}{(1-r)^{2(2-\alpha-\beta)+1}}$$

$$L(1,\lambda+1)\int_0^r\frac{[1-(1-2\rho)r]}{(1+r)^{2(2-\alpha-\beta)+1}}dr\le|f(z)|\le L(1,\lambda+1)\int_0^r\frac{[1+(1-2\rho)r]}{(1-r)^{2(2-\alpha-\beta)+1}}dr$$

极值函数为

$$f(z)=L(1,\lambda+1)\int_0^z\frac{[1+(1-2\rho)xz]}{(1-xz)^{2(2-\alpha-\beta)+1}}dz.$$

§ 3.7 用 H^{λ} 算子定义的解析函数类

本节中我们讨论用 H^{λ} 算子定义的解析函数类性质[28]-[30].

1. 有关定及引理.

设 n, p 为正整数，S_n 表示在 D 内解析函数 $p(z)=1+\sum_{k=n}^{+\infty} p_k z^k$ 组成的类. $A_p(n)$ 表示在 D 内解析函数 $f(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{+\infty} a_k z^k$ 构成的类.

设 $\lambda>-1$，用

$$H^{\lambda} p(z)=\frac{1}{(1-z)^{\lambda+1}} * p(z), p(z) \in S_n, z \in D. \tag{3.7.1}$$

定义算子 H^{λ}，展开（3.7.1）式得到

$$H^{\lambda} p(z)=1+\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)}{n} p_n z^n, \tag{3.7.2}$$

定义 3.7.1 设 $\lambda>-1, 0 \leq \mu, \alpha>0, 0 \leq \beta<1, -1 \leq B<A \leq 1, A \neq B$, 如果函数 $p(z) \in S_n$ 满足条件

$$\left(H^{\lambda} p(z)\right)^{\alpha}+\mu z\left[\left(H^{\lambda} p(z)\right)^{\alpha}\right]' \prec \frac{1+Az}{1+Bz}, \tag{3.7.3}$$

则称 $p(z) \in p_{n,\lambda}(\alpha, \mu, A, B)$. 当 $A=1-2\beta(0 \leq \beta<1), B=-1$ 时，从（3.7.3）式得到

$p(z) \in p_{n,\lambda}(\alpha, \mu, \beta)$ 当且仅当

$$\operatorname{Re}\left\{\left(H^{\lambda} p(z)\right)^{\alpha}+\mu z\left[\left(H^{\lambda} p(z)\right)^{\alpha}\right]'\right\}>\beta, z \in D. \tag{3.7.4}$$

在 $p_{n,0}(\alpha, \mu, A, B)$ 中分别取 $p(z)=\frac{f(z)}{z^p}$ 或 $\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}$ 时还得到

$$B_n(\alpha, \mu, p, A, B)=\left\{f(z) \in A_p(n): \left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\mu z\left[\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}\right]' \prec \frac{1+Az}{1+Bz}, z \in D\right\};$$

$$B_n'(\alpha,\mu,p,A,B)=\left\{f(z)\in A_p(n):\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}+\mu z\left[\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}\right]'\prec\frac{1+Az}{1+Bz},z\in D\right\}.$$

不加证明直接引用如下两个引理，证明见文[31][32]：

引理 3.7.1 设函数$F(z)=1+b_nz^n+b_{n+1}z^{n+1}+\cdots$在D内解析，$h(z)$为D内解析凸函数，且$h(0)=1$.如果

$$F(z)+\frac{1}{c}zF'(z)\prec h(z), \tag{3.7.5}$$

其中$c\neq 0$且$\mathrm{Re}\,c\geq 0$,则

$$F(z)\prec\frac{c}{n}z^{-\frac{c}{n}}\int_0^z t^{\frac{c}{n}-1}h(t)dt\prec h(z),$$

且$\frac{c}{n}z^{-\frac{c}{n}}\int_0^z t^{\frac{c}{n}-1}h(t)dt$为微分从属（3.7.5）的最佳控制.

引理 3.7.2 设$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}q_kz^k$在D内解析，$g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k$为D内解析凸函数，如果$f(z)\prec g(z)$,则$|a_k|\leq|b_\cdot|(k=1,2,\cdots)$.

2. 主要性质

定理 3.7.1 设$\mu>0,p(z)\in p_{n,\lambda}(\alpha,\mu,A,B)$,则

$$\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\prec\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1+Azu}{1+Bzu}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du$$

证 设$F(z)=\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}$,则

$$F(z)=1+\frac{(\lambda-1)\cdots(\lambda+n)}{n!}p_nz^n+\cdots,$$

$$\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}+\mu z\left[\left(H^{\lambda}p[z]\right)^{\alpha}\right]'=F(z)+\mu zF'(z).$$

由于 $p(z)\in p_{n,\lambda}(\alpha,\mu,A,B)$, 我们有

$$F(z)+\mu zF'(z)\prec\frac{1+Az}{1+Bz}$$

显然，$h(z)=\dfrac{1+Az}{1+Bz}$在D内解析，$h(0)=1$, 由 $\mu>0$, $c=\dfrac{1}{\mu}>0$, 利用引理 3.7.1，

并对积分作变成$t=uz, z\in D$, 则

$$\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}=F(z)\prec\frac{1}{n\mu}z^{-\frac{1}{n\mu}}\int_0^z t^{\frac{1}{n\mu}-1}\frac{1+Az}{1+Bz}dt=\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1+Azu}{1+Bzu}\cdot u^{\frac{1}{n\mu}-1}\cdot du.$$

推论 3.7.1 $p_{n,\lambda}(\alpha,\mu,A,B)\subset P_{n,\lambda}(\alpha,0,A,B)$.

定理 3.7.2 **设**$\mu_2\geq\mu_1\geq 0, 1>\beta_2\geq\beta_1\geq 0$, 则

$$p_{n,\lambda}(\alpha,\mu_2,\beta_2)\subset p_{n,\lambda}(\alpha,\mu_1,\beta_1).$$

证 设 $p(z)\in p_{n,\lambda}(\alpha,\mu_2\beta_2)$, 由（3.7.4）式和$\beta_2\geq\beta_1\geq 0$可知

$$\operatorname{Re}\left\{\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}+\mu_2 z\left[\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\right]'\right\}>\beta_2\geq\beta_1, z\in D. \tag{3.7.6}$$

由推论 3.7.1 得

$$\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\prec\frac{1+(1-2\beta_2)z}{1-z}, \tag{3.7.7}$$

且（3.7.7）式与$\operatorname{Re}\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}>\beta_2\geq\beta_1, z\in D$等价的. 因此.

如果$\operatorname{Re}\left[z\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\right]'\geq 0$, 则

$$\operatorname{Re}\left\{\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}+\mu_1 z\left[\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\right]'\right\}\geq\operatorname{Re}\left[\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\right]>\beta_1;$$

如果$\operatorname{Re}\left[z\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\right]'<0$, 则从（3.7.6）式与$\mu_2\geq\mu_1\geq 0, 1>\beta_2\geq\beta_1\geq 0$, 得

$$\operatorname{Re}\left\{\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}+\mu_1 z\left[\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\right]'\right\}\geq$$

$$\operatorname{Re}\left\{\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}+\mu_2 z\left[\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\right]'\right\}>\beta_2\geq\beta_1,\ z\in D.$$

因此 $p(z)\in p_{n,\lambda}(\alpha,\mu_1,\beta_1)$. 证毕.

定理 3.7.3 设 $\mu>0,-1\leq B<1, p(z)\in p_{n,\lambda}(\alpha,\mu,A,B)$,

(1). 若 $A>B$, 则

$$\operatorname{Re}\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}>\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1-Au}{1-Bu}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du, z\in D.$$

（2）若 $A<B$, 则

$$\operatorname{Re}\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}<\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1-Au}{1-Bu}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du, z\in D.$$

极值函数由

$$H^{\lambda}p(z)=\left[\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1+Auz^n}{1+Buz^n}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du\right]^{\frac{1}{\alpha}},\qquad(3.7.8)$$

确定.

证 （1）因 $p(z)\in p_{n,\lambda}(\alpha,\mu,A,B)$, 由定理 3.7.1，得到

$$\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\prec\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1+Azu}{1+Bzu}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du$$

$A>B$ 时，由多之函数的条件极值的 $\min\limits_{z\in D}\operatorname{Re}\left(\frac{1+Azu}{1+Bzu}\right)>\frac{1-Au}{1-Bu}$, 由从属定义和 $A>B$，可得

$$\operatorname{Re}\left(H^{\lambda}P(Z)\right)^{\alpha}\geq\min_{z\in D}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1+Azu}{1+Bzu}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du\right]=\frac{1}{n\mu}\int_0^1\min_{z\in D}\left(\frac{1+Azu}{1+Bzu}\right)\cdot u^{\frac{1}{n\mu}-1}du$$

$$>\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1-Au}{1-Bu}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du, z\in D.$$

（2）$A<B$ 时，相同的方法可证明

$$\mathrm{Re}\left(H^{\lambda}P(z)\right)^{\alpha} \le \max_{z\in D}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{n\mu}\int_0^1 \frac{1+Azu}{1+Bzu} u^{\frac{1}{n\mu}-1} du\right] = \frac{1}{n\mu}\int_0^1 \max_{z\in D}\mathrm{Re}\left(\frac{1+Azu}{1+Bzu}\right) u^{\frac{1}{n\mu}-1} du$$

$$< \frac{1}{n\mu}\int_0^1 \frac{1-Au}{1-Bu} u^{\frac{1}{n\mu}-1} du, z\in D.$$

定理 3.7.4 设 $p(z)\in p_{n,\lambda}(\alpha,\mu,A,B)$, 则

（1）若 $\mu=0, |z|=r<1$, 则

$$\left(\frac{1-Ar^n}{1-Br^n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left|H^{\lambda}p(z)\right| \le \left(\frac{1+Ar^n}{1+Br^n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

（2）若 $\mu>0, |z|=r<1$, 则

$$\left(\frac{1}{n\mu}\int_0^1 u^{\frac{1}{n\mu}} \frac{1-Aur^n}{1-Bur^n} du\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left|H^{\lambda}p(z)\right| \le \left(\frac{1}{n\mu}\int_0^1 u^{\frac{1}{n\mu}-1} \frac{1+Aur^n}{1+Bur^n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

证 (1) 设 $\mu=0, p(z)\in p_{n,\lambda}(\alpha,\mu,A,B), -1\le\beta<A\le1$, 由 （3.7.3） 式知 $\left(H^{\lambda}P(z)\right)^{\lambda} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$. 根据从属定义，存在解析函数 $\omega(z)$, 在 D 内 $|\omega(z)|\le|z|$, 使得

$$\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha} = \frac{1+A\omega(z)}{1+B\omega(z)}.$$

由 $Schwarz$ 引理，有

$$\omega(z) = c_n^{zn} + c_{n+1}z^{n+1} + \cdots \text{和} \left|w(z)\right| \le |z|^n, |z| = r<1.$$

$$\left|H^{\lambda}p(z)\right|^{\alpha} = \left|\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}\right| \le \frac{1+A\left|w(z)\right|}{1+B\left|w(z)\right|} \le \frac{1+Ar^n}{1+Br^n}.$$

$$\left|H^{\lambda}p(z)\right|^{\alpha} \ge \mathrm{Re}\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha} \ge \frac{1-Ar^n}{1-Br^n}.$$

因此

$$\left(\frac{1-Ar^n}{1-Br^n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left|H^{\lambda}p(z)\right| \le \left(\frac{1+Ar^n}{1+Br^n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

（2）设 $\mu>0$, 由定理 3.7.1 可知

$$\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\prec\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1+Azu}{1+Bzu}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du.$$

由从属关系，存在 D 内解析 $w(z)=c_nz^n+c_{nm}z^{n+1}+\cdots$，且 $|w(z)|\le|z|^n,|z|=r<1$. 使得

$$\left|H^{\lambda}p(z)\right|\le\frac{1}{n_{\mu}}\int_0^1\left|\frac{1+Auw(z)}{1+Buw(z)}\right|u^{\frac{1}{n\mu}-1}du\le\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1+Au|w(z)|}{1+B|w(z)|}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du$$

$$\le\frac{1}{n\mu}\int_0^1\frac{1+Aur^n}{1+Bur^n}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du.$$

并且

$$\left|H^{\lambda}p(z)\right|^{\alpha}\ge\mathrm{Re}\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\ge\int_0^1\frac{1-Aur^n}{1-Bur^n}u^{\frac{1}{n\mu}-1}du.$$

因此（2）的结论为真. 极值函数由（3.7.8）式确定. 证毕.

定理 3.7.5 设 $p(z)\in p_{n,\lambda}(\alpha,\mu,A,B)$, 则

$$|p_n|\le\frac{n|A-B|}{\alpha(1+n\mu)((\lambda+1)\cdots(\lambda+n))}$$

其中极值函数为

$$p_{n,\alpha,\mu,A,B,\lambda}(z)=1+\frac{n|A-B|}{\alpha(1+n\mu)\left[(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)\right]}z^n+\cdots\tag{3.7.9}$$

证 设 $p(z)\in p_{n,\lambda}(\alpha,\mu,A,B)$, 由（3.7.2）式得

$$\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}+\mu z\left[\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\right]'=1+\frac{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}{n!}\alpha(1+n\mu)p_nz^n+\cdots\prec\frac{1+Az}{1+Bz}.$$

利用引理 3.7.2 可得

$$\left|\frac{\alpha(1+n\mu)\left[(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)\right]}{n}p_n\right|\le|A-B|$$

由此推出

$$|p_n| \le \frac{n|A-B|}{\alpha(1+n\mu)\left[(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)\right]}.$$

极值函数由（3.7.9）式确定.

注 从定理3.7.1定理3.7.5容易推出 $B_n(\alpha,\mu,p,A,B)$.和 $B_n'(\alpha,\mu,p,A,B)$ 中函数的性质.略.

我们还引进函数类[29]：

定义 3.7.2 设 $\lambda>-1, 0\le\beta\le1$. 如果 $q(z)=1+B_nz^n+\cdots\in S_n$, 满足条件

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{z\left(H^\lambda q(z)\right)'}{H^\lambda q(z)}\right\}>\beta, z\in D.$$

则 $q(z)\in Q_n(\lambda,\beta)$.

定义 3.7.3 设 $\lambda>-1, \alpha>0, 0\le\beta<1, 0\le p<1, p(z)=1+A_nz^n+\cdots\in S_n$, 如果存在 $q(z)\in Q_n(\lambda,\beta)$, 使得

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{z\left(H^\lambda p(z)\right)'}{H^\lambda p(z)}\right)\left(\frac{H^\lambda p(z)}{H^\lambda q(z)}\right)^\alpha>\rho, z\in D.$$

则 $p(z)\in p_n(\lambda,\alpha,\beta,\rho)$. 在 $p_n(0,\alpha,\beta,\rho)$ 中分别取 $p(z)=\frac{f(z)}{z}, q(z)=\frac{G(z)}{z}$ $\left(G(z)\in S^*(\beta)\right)$ 时，就得到熟知的 *Bazilevic* 函数类. 我们得到如下两个结果.

定理 3.7.6 设 $\lambda>-1, \alpha>0, 0\le\beta<1, q(z)=1+B_nz^n+\cdots\in Q_n(\lambda,\beta)$, 作解析函数 $N(z)$,

$$(1-\mu)\left(H^\lambda N(z)\right)^\alpha=(1-\mu)\left(H^\lambda q(z)\right)^\alpha+\mu z\left[\left(H^\lambda q(z)\right)^\alpha\right]', 0<\mu<\frac{1}{1+\alpha},$$

则 $|z|<R_0^{\frac{1}{n}}$ 时函数 $N(z)=1+N_nz^n+\cdots$ 属于 $Q_n(\lambda,\beta)$, 其中 R_0 表示方程

$$\left[2\alpha\mu(1-\beta)-(1-\mu)\right]R^n-2\mu\left[\alpha(1-\beta)+n\right]R+(1-\mu)=0. \tag{3.7.10}$$

的正根.

定理 3.7.7 在定理 3.7.6 的假设下，若 $p(z)\in p_n(\lambda,\alpha,\beta,\rho)$，作解析函数 $M(z)$

$$(1-\mu)\left(H^{\lambda}M(z)\right)^{\alpha}=(1-\mu)\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}+\mu z\left[\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}\right]',0<\mu<\frac{1}{1+\alpha}$$

则 $|z|<R_0^{\frac{1}{n}}$ 时函数 $M(z)=1+M_nz^n+\cdots$ 属于 $p_n(\lambda,\alpha,\beta,\rho)$，其中 R_n 为方程（3.7.10）的正根.

我们还得到 $p_{n,\lambda}(\alpha,\mu,A,B)$ 的一个子类 $P_{\lambda}(\mu,\alpha,\beta)$ [30]：

设 $\lambda>-1,0<\mu\le1,\alpha>0.0\le\beta<1$，如果 $P(z)\in S$ 满足条件

$$R_e\left\{\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha}+\mu z\left(H^{\lambda}p(z)\right)'\left(H^{\lambda}p(z)\right)^{\alpha-1}\right\}>\beta,z\in D;\quad(3.7.11)$$

则称 $p(z)$ 在 $P_{\lambda}(\mu,\alpha,\beta)$ 中，幂函数均取主值，λ,μ,α,β 均满足 $\lambda>-1,0<\mu\le1,\alpha>0.0\le\beta<1$，$F(a,b,c;x)$ 为超几何级数.

利用 $L(a,c)$ 算子的性质，可知

$$L(a,c)p(z)=\phi(a,c;z)*p(z),p(z)\in S,$$

$$\phi(2(1-\beta),1;z)=1/(1-z)^{2(1-\beta)}.$$

由此推出

$$L(\lambda+1,1)P(z)=H^{\lambda}p(z),\quad(3.7.12)$$

在此,我们用算子 $L(a,c)$,由(3.7.12)式将(3.7.11)式改写成

$$R_e\left\{\left(L(\lambda+1,1)p(z)\right)^{\alpha}+\mu z\left(L(\lambda+1,1)p(z)\right)'\left(L(\lambda+1,1)p(z)\right)^{\alpha-1}\right\}>\beta,z\in D,\quad(3.7.13)$$

得到如下性质,这里不予证明详见文[30]：

定理 3.7.8 设 $p(z)\in P_{\lambda}(\mu,\alpha,\beta)$ 当且仅当存在 $X=\{x:|x|=1\}$ 上的概率测度 $\mu(x)$,，使得

$$p(z)=L(1,\lambda+1)\left\{\frac{1}{\mu z^{\frac{\alpha}{\mu}}}\int_0^z\left[t^{\frac{\alpha}{\mu}-1}\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)xt}{1-xt}d\mu(x)\right]dt\right\}^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (3.7.14)$$

特别，当 $\lambda>0$ 时

$$p(z)=\int_0^1 u^{-1}\left\{\frac{\alpha}{\mu(uz)^{\frac{\alpha}{\mu}}}\int_0^{uz}\left[t^{\frac{\alpha}{\mu}-1}\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)xt}{1-xt}d\mu(x)\right]dt\right\}^{\frac{1}{\alpha}}d\mu(1,\lambda)(z),$$

对于固定的 $\lambda,\alpha,\beta,P_\lambda(\mu,\alpha,\beta)$ 与 X 上的概率测度 $\{\mu(x)\}$ 以关系式（3.7.14）构成一一对应关系.

定理 3.7.9 设 $p(z)\in P_\lambda(\mu,\alpha,\beta)$,则对 $|z|=r<1$, 有

$$R_e p(z)\geq L(1,\lambda+1)\left\{\frac{\alpha}{\mu}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\mu}-1}\frac{1-(1-2\beta)rt}{1+rt}dt\right\}^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (3.7.15)$$

$$|p(z)|\leq L(1,\lambda+1)\left\{\frac{\alpha}{\mu}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\mu}-1}\frac{1+(1-2\beta)rt}{1-rt}dt\right\}^{\frac{1}{\alpha}}(0<\mu<1) \quad (3.7.16)$$

(3.7.15),(3.7.16)式准确的,等号

$$p_{\lambda,\mu,\alpha,\beta}(z)=L(1,\lambda+1)\left\{\frac{\alpha}{\mu z^{\frac{\alpha}{\mu}}}\int_0^z t^{\frac{\alpha}{\mu}-1}\frac{1+(1-2\beta)t}{1-t}dt\right\}^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (3.7.17)$$

分别 $z=-r,r$ 时成立.

推论 3.7.2 设 $p(z)\in P_\lambda(\mu,1,\beta)$, 则对 $|z|=r<1$, 有

$\operatorname{Re} p(z)$

$$>L(1,\lambda+1)\left\{\frac{1}{\mu}\int_0^1 t^{\frac{1}{\mu}-1}\frac{1-(1-2\beta)t}{1+t}dt\right\}=L(1,\lambda+1)\left\{(2\beta-1)+2(1-\beta)F\left[1,\frac{1}{\mu},\frac{1}{\mu}+1;1\right]\right\}$$

推论 3.7.3 设 $f(z)\in B(\mu,\alpha,\beta)$, 则对 $|z|=r<1$, 有

$$R_e\frac{f(z)}{z}>\left\{(2\beta-1)+\frac{2(1-\beta)}{\mu(1+r)}+2(1-\beta)\left(1-\frac{1}{\mu}\right)F\left[1,\frac{1}{\mu},\frac{1}{\mu}+1;1\right]\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

等号由

$$f(z)=z\left\{\frac{\alpha}{\mu z^{\frac{\alpha}{\mu}}}\int_0^z t^{\frac{\alpha}{\mu}-1}\frac{1+(1-2\beta)t}{1-t}dt\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

当 $z=-r$ 时成立.

§3.8 用复合算子定义的关于共轭点的解析函数类

本节中引进并讨论用复合算子定义的关于共轭点的解析函数类，得到卷积性质，包含关系，积分表达式、端点性质，偏差定理，系数不等式.

1. 有关定义

我们在 A 中引入两个线性算子 D_λ^n 和 H:

定义 3.8.1[33] 设 $f(z)\in A, n\in N, \lambda\geq 0$, D_λ^n 为 A 上满足下列条件:

$$D_\lambda^0 f(z)=f(z), D_\lambda f(z)=(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z),\cdots,D_\lambda^n f(z)=D_\lambda\left(D_\lambda^{n-1}f(z)\right)$$

则称 D_λ^n 为推广的 Salagean 算子. 显然 D_λ^n 具有逆算子 D_λ^{-n}, 当 $\lambda=1$ 时， D_1^n 为 Salagean 算子. 从定义 3.8.1 容易推出

$$D_\lambda^n f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}(1+(n-1)\lambda)^n a_n z^n \tag{3.8.1}$$

定义 3.8.2[34] 对于 $f(z)\in A$, 定义算子 $H:Hf(z)=g(z)$,

$$g(z)=\frac{1}{2}\left[f(z)+\overline{f(\overline{z})}\right]$$

若 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$，则

$$Hf(z)=g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(\operatorname{Re}a_k)z^k \tag{3.8.2}$$

不难证明算子 D_λ^n 和 H 有如下基本性质:

(1) D_λ^n 是线性的，即对 $f(z),g(z)\in A$ 及任意复数 a, b 有

$$D_\lambda^n(af(z)+bg(z))=aD_\lambda^n f(z)+bD_\lambda^n g(z)$$

(2) $H^2=HH=H$. ③. $HD_\lambda^n=D_\lambda^n H$.

(3) 对于 $f(z)\in A$, 而 $k(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ 的所有系数为实数，则

$$H(k(z)\cdot f(z))=k(z)\cdot(Hf(z))$$

(4) H 是可加的，即对 $f(z),g(z)\in A$ ，有

$$H(f(z)+g(z))=Hf(z)+Hg(z)$$

(5) 设 $p(z)\in P$, 则 $Hp(z)\in P$.

引进如下两类解析函数[35]：

定义 3.8.3 设 $\lambda\ge 0,\mu\ge 0,m\in N\cup\{0\}$, 若函数 $f(z)\in A$ 满足条件

$$\frac{f(z)f'(z)}{z}\ne 0,\qquad \mathrm{Re}\frac{D_\mu(D_\lambda^m f(z))}{D_\lambda^m Hf(z)}>0,\ z\in U. \tag{3.8.3}$$

则称函数 $f(z)$ 属于函数类 $S_{c,m}(\lambda,\mu)$ 中.

定义 3.8.4 设 $f(z)\in A$, $\lambda\ge 0,\mu\ge 0,m\in N\cup\{0\}$, 若存在 $\varphi(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu)$，满足条件

$$\frac{f(z)f'(z)}{z}\ne 0,\qquad \mathrm{Re}\frac{D_\mu(D_\lambda^m f(z))}{D_\lambda^m(H\varphi(z))}>0,\ z\in U. \tag{3.8.4}$$

则称函数 $f(z)$ 属于函数类 $C_{c,m}(\lambda,\mu)$ 中.

2. 主要性质及其证明

我们需要如下引理：

引理 3.8.1 [27] 设 $k\in K,f(z)\in S^*$, 则 $k*f(z)\in S^*$; 等价地，对于 $k\in K,f(z)\in S^*$, 则当 $p(z)\in P$ 时有

$$\mathrm{Re}\frac{k*p(z)f(z)}{k*f(z)}>0,\ z\in U. \tag{3.8.5}$$

引理 3.8.2[36] 设 c 为复数且$\mathrm{Re}\,c>0$, 则函数

$$k_c(z)=\frac{c+1}{z^c}\int_0^z\frac{t^c}{1-t}dt=(1+c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+c}=z+\cdots, \tag{3.8.6}$$

是 U 内的凸象单叶函数.

引理 3.8.3 设 c 为复数且$\mathrm{Re}\,c>0, m\in N$, 则函数

$$k_{c,m}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+c)^m}{(n+c)^m}z^n=z+\cdots, \tag{3.8.7}$$

是D 内的凸象单叶函数.

证 为了证明函数$k_{c,m}(z)$在D 内的凸象单叶函数，我们只要证明函数$zk'_{c,m}(z)$是D 内的星象单叶函数，即根据判定星象函数的等价条件证明不等式

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^2\left|\frac{1+c}{n+c}\right|^m<1 \tag{3.8.8}$$

成立即可.

下面利用数学归纳法证明（3.8.8）式成立.

(1) 当 $m=1$时，由引理 2 可知（3.8.8）式成立，即成立不等式

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^2\left|\frac{1+c}{n+c}\right|<1.$$

由此推出

$$\left|\frac{1+c}{n+c}\right|<1 \tag{3.8.9}$$

(2) 假设$m=k$时，（3.8.8）式成立. 下面要证明$m=k+1$时，（3.8.8）式成立. 利用（3.8.9）式，得到

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^2\left|\frac{1+c}{n+c}\right|^{k+1}=\sum_{n=2}^{\infty}n^2\left|\frac{1+c}{n+c}\right|^k\left|\frac{1+c}{n+c}\right|<\sum_{n=2}^{\infty}n^2\left|\frac{1+c}{n+c}\right|^k.$$

再利用假设（2），即得（3.8.8）式成立，由此推出函数$k_{c,m}(z)$是 U 内的凸象

单叶函数. 证毕.

定理 3.8.1 设函数 $f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu), m\in N\cup\{0\}$, 则

$$\mathrm{Re}\frac{D_\mu\left(D_\lambda^m\left(Hf(z)\right)\right)}{D_\lambda^m\left(Hf(z)\right)}>0. \tag{3.8.10}$$

证 令 $f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu)$, 置

$$\frac{D_\mu\left(D_\lambda^m f(z)\right)}{HD_\lambda^m f(z)}=\frac{D_\mu\left(D_\lambda^m f(z)\right)}{D_\lambda^m Hf(z)}=p(z). \tag{3.8.11}$$

则 $p(z)\in P$. 由（3.8.11）式得

$$D_\mu D_\lambda^m f(z)=p(z)\cdot HD_\lambda^m f(z). \tag{3.8.12}$$

解析函数 $HD_\lambda^m f(z)=D_\lambda^m Hf(z)$ 的系数全是实数. 因而

$$H\left(D_\mu\left(D_\lambda^m f(z)\right)\right)=D_\mu\left(HD_\lambda^m f(z)\right)=D_\mu\left(D_\lambda^m\left(Hf(z)\right)\right),$$

$$H\left\{p(z)\cdot D_\lambda^m\left(Hf(z)\right)\right\}=\left[Hp(z)\right]\cdot D_\lambda^m\left(Hf(z)\right)$$

令 $Hp(z)=q(z)$, 则 $q(z)\in P$. 从（3.8.11）式可得

$$D_\mu D_\lambda^m\left(Hf(z)\right)=q(z)\cdot D_\lambda^m\left(Hf(z)\right). \tag{3.8.13}$$

于是，有

$$\frac{D_\mu\left(D_\lambda^m\left(Hf(z)\right)\right)}{D_\lambda^m\left(Hf(z)\right)}=q(z)=Hp(z)\in P.$$

这就是所要证明的（3.8.10）式.

推论 3.8.1 设函数 $f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu), m\in N\cup\{0\}, \lambda\geq 0, \mu\geq 1$, 则

$$D_\lambda^m\left(Hf(z)\right)\in S^*\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right).$$

利用引理 3.8.1 和推论 3.8.1 容易证明:

定理 3.8.2 对每个函数 $f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu), m\in N\cup\{0\}, \lambda\geq 0, \mu\geq 1$, 当 $k\in K$ 且具有实系数时, $k*f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu)$.

证 设 $f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu)$, 则相应地有 $p(z)\in P$, 使得

$$D_{\mu}\left(D_{\lambda}^{m}f(z)\right)=p(z)\cdot D_{\lambda}^{m}\left(Hf(z)\right).$$

取$k\in K$作卷积，有

$$k*D_{\mu}\left(D_{\lambda}^{m}f(z)\right)=k*\left[p(z)\cdot D_{\lambda}^{m}\left(Hf(z)\right)\right] \tag{3.8.14}$$

$$k*D_{\mu}\left(D_{\lambda}^{m}f(z)\right)=D_{\mu}\left(D_{\lambda}^{m}\left(k*f(z)\right)\right).$$

$$\frac{D_{\mu}\left(D_{\lambda}^{m}\left(k*f(z)\right)\right)}{k*D_{\lambda}^{m}\left(Hf(z)\right)}=\frac{k*\left[p(z)\cdot D_{\lambda}^{m}\left(Hf(z)\right)\right]}{k*D_{\lambda}^{m}\left(Hf(z)\right)}, \tag{3.8.15}$$

由推论3.8.1，$D_{\lambda}^{m}\left(Hf(z)\right)\in S^{*}\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)$，且$k\in K$且具有实系数$k\in K$且具有实系数，故

$$k*D_{\lambda}^{m}\left(Hf(z)\right)=D_{\lambda}^{m}\left(H(k*f(z))\right), \tag{3.8.16}$$

由引理1，当$z\in U$时，

$$\operatorname{Re}\frac{D_{\mu}\left(D_{\lambda}^{m}\left(k*f(z)\right)\right)}{D_{\lambda}^{m}H\left(k*f(z)\right)}>0.$$

即 $k*f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu)$. 证毕.

推论 3.8.2 设 $f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu), m\in N\cup\{0\}, \mu\geq 1$, 当 $0\leq\lambda\leq 1$ 时，有 $Hf(z)\in S^{*}\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)$.

证 对于某个 $\lambda, 0\leq\lambda\leq 1, f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n}z^{n}\in S_{c,m}(\lambda,\mu)$. 取实系数的 k, $k*f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu)$. 即 $D_{\lambda}^{m}\left(H(k*f(z))\right)=D_{\lambda}^{m}\left(k*Hf(z)\right)$. 由于

$$D_{\lambda}^{m}\left(H(f(z))\right)=D_{\lambda}^{m}\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}(\operatorname{Re}a_{n})z^{n}\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+(n-1)\lambda\right)^{m}(\operatorname{Re}a_{n})z^{n}, (a_{1}=1), \tag{3.8.17}$$

对 $\lambda > 0$, 记 $\gamma = \frac{1}{\lambda} - 1$, 则 $\gamma \ge 0, [1+(n-1)\lambda]^m = \lambda^m \left(n + \frac{1}{\lambda} - 1\right)^m$, 而 $\lambda = 0$ 的情形不必

考虑.对于 $0 \le \lambda \le 1$, 考虑函数

$$k_{\gamma,m}(z) = \frac{1}{\lambda^m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{\lambda} - 1\right)^{-m} z^n,$$

由引理 3 知，$k_{\gamma,m}(z)$ 是 U 内的凸象单叶函数. 因此

$$k_{\gamma,m}(z) * D_\lambda^m (Hf(z)) = \frac{1}{\lambda^m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{\lambda} - 1\right)^{-m} z^n * \sum_{n=1}^{\infty} (1+(n-1)\lambda)^m (\mathrm{Re}\, a_n) z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Re}\, a_n) z^n, (a_1 = 1). \tag{3.8.18}$$

所以

$$k_{\gamma,m}(z) * D_\lambda^m (Hf(z)) = Hf(z)$$

由此即得 $Hf(z) \in S^*\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)$. 证毕.

定理 3.8.3 设 $0 \le \lambda \le 1$, $\mu \ge 1$, 则 $C_{c,m}(\lambda, \mu) \subset C_{c,m}(0, \mu)$.

证 令 $f(z) \in C_{c,m}(\lambda, \mu)$, $\lambda \in (0,1)$. 于是有 $\varphi(z) \in S_{c,m}(\lambda, \mu)$, $m \in N \cup \{0\}$,

$\mu \ge 1$, 使得

$$\frac{D_\mu (D_\lambda^m f(z))}{D_\lambda^m H\varphi(z)} = p(z) \in P. \tag{3.8.19}$$

令

$$\frac{D_\mu f(z)}{H\varphi(z)} = q(z),$$

则 $q(z) \in P$. 由推论 1，$D_\mu H\varphi(z) \in S^*\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)$. 取 $k(z) = k_{m,\gamma}(z)$, 其中

$\gamma = \frac{1}{\lambda} - 1$, $k_{m,\gamma}(z)$ 由（3.8.7）式定义，于是

$$k_{m,\gamma}(z)*D_\mu D_\lambda^m f(z)=D_\mu\left(k_{m,\gamma}(z)*D_\lambda^m f(z)\right)=D_\mu f(z).$$

于是有

$$\frac{D_\mu f(z)}{H\varphi(z)}=\frac{k_{m,\gamma}(z)*\left[p(z)\cdot D_\lambda^m H\varphi(z)\right]}{k_{m,\gamma}(z)*D_\lambda^m H\varphi(z)}. \tag{3.8.20}$$

根据定理 2，(3.8.20) 式的右端具有正实部，此即所求证. 证毕.

定理 3.8.4 设$\lambda\geq 0,\mu\geq 1,$函数 $f(z)\in S_{c,m}^n(\lambda,\mu)$当且仅当$X=\{x:|x|=1\}$上的概率测度$\eta(x),\xi(x)$，使得

$$f(z)=D_\lambda^{-m}D_\mu^{-1}\left\{z\exp\left[-2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)\int_{|x|=1}\log(1-xz)d\xi(x)\right]\int_{|x|=1}\frac{1+xz}{1-xz}d\eta(x)\right\} \tag{3.821}$$

对于固定的$\lambda\geq 0,\ \mu\geq 1,\ S_{c,m}^n(\lambda,\mu)$与 $X\times X$ 上的概率测度点$\{(\xi,\eta)\}$以关系式 (3.8.21) 构成一一对应.

证 设函数$f(z)\in S_{c,m}^n(\lambda,\mu)$，则存在正实部函数$p(z)\in P,$使得

$$\frac{D_\mu\left(D_\lambda^m f(z)\right)}{D_\lambda^m Hf(z)}=p(z). \tag{3.8.22}$$

借助P中函数的积分表达式，我们得到

$$\frac{D_\mu\left(D_\lambda^m f(z)\right)}{D_\lambda^m Hf(z)}=\int_{|x|=1}\frac{1+xz}{1-xz}d\eta(x). \tag{3.8.23}$$

其中$\eta(x)$是X上的概率测度.

根据推论 3.8.1，可知$D_\lambda^m(Hf(z))\in S^*\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)$.利用星象函数的积分表达式，得到

$$D_\lambda^m(Hf(z))=z\exp\left[-2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)\int_{|x|=1}\log(1-xz)d\xi(x)\right]. \tag{3.8.24}$$

其中$\xi(x)$是X上的概率测度.

再利用 D_λ^n 的逆算子 $(D_\lambda^n)^{-1}$ 从（3.8.23）（3.8.24）两式得到（3.8.21）式.

反之，亦然，对于固定的 $\lambda \ge 0,\ \mu \ge 1$, 由于 $\{(\xi,\eta)\}$ 与 $P\times P$ 之间构成一一对应，而 $P\times P$ 与 $S_{c,m}^n(\lambda,\mu)$ 之间也是一一对应，这表明定理的后一个结论为真. 证毕.

下面要讨论类中函数的端点性质及偏差定理.

定理3.8.5 任意函数 $f(z)\in S_{c,m}^n(\lambda,\mu)$, $\lambda \ge 0, \mu \ge 1$, 有端点积分表示式

$$f(z)=D_\lambda^{-m}D_\mu^{-1}\int_{X\times Y}\left[\frac{1+xz}{1-xz}\cdot(1-yz)^{-2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)}\right]d\eta(\theta,\varphi), \qquad (3.8.25)$$

其中 $x=e^{i\varphi}, y=e^{i\theta}, X=Y=\{e^{i\theta}:0\le\theta\le 2\pi\}, \eta(\theta,\varphi)$ 为二元连续的概率测度.

证 记 $S_{c,m}'(\lambda,\mu)=\{D_\mu D_\lambda^m f(z): f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu)\}$, 由 D_λ^n 算子的映射性质，我们可以将问题转化为函数族 $S_{c,m}'(\lambda,\mu)$ 的讨论.

$$令：\ g_{x,y}=\frac{1+xz}{1-xz}\cdot\frac{1}{(1-yz)^{2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)}},\ |x|=|y|=1$$

$$M=\left\{\int_{X\times Y} g_{x,y}(z)d\eta(\theta,\varphi):\eta(\theta,\varphi)\text{为连续的概率测度}\right\}$$

由假设容易证明包含关系 $M\subset\overline{Co}\left(S_{c,m}'(\lambda,\mu)\right)$.

另外，假设对 $\forall\eta_1,\eta_2$ 为两个连续的概率测度,有

$$\int_{X\times Y} g_{x,y}(z)d\eta_1(\theta,\varphi)=\int_{X\times Y} g_{x,y}(z)d\eta_2(\theta,\varphi), \qquad (3.8.26)$$

由于 $g_{x,y}(z)$ 关于 x,y 的分离形式,知 $\eta_i(\theta,\varphi)=\eta_i^{(1)}(\theta)\eta_i^{(2)}(\varphi)(i=1,2)$ 可唯一分解成两个独立的连续概率测度乘积，这样（3.8.28）式可化成

$$\int_X\frac{1+xz}{1-xz}d\eta_1^{(1)}(\theta)\int_Y\frac{d\eta_1^{(2)}(\varphi)}{(1-yz)^{2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)}}=\int_X\frac{1+xz}{1-xz}d\eta_2^{(1)}(\theta)\int_Y\frac{d\eta_2^{(2)}(\varphi)}{(1-yz)^{2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)}} \qquad (3.8.27)$$

以下应用§3.5 中函数类相同的方法容易证明（3.8.27）式唯一性，因此有

$\eta_1^{(j)}=\eta_2^{(j)}(j=1,2)$. 由此可知,M 在 $\eta(\theta;\varphi)$ 的表示下是唯一的. 根据 $g_{x,y}(z)$ 关于 x,y,z 的连续可微性, 得到

$$\varepsilon(K)=\left\{\frac{1+xz}{1-xz}\cdot\frac{1}{(1-yz)^{2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)}}:|x|=|y|=1\right\},\quad(3.8.28)$$

又因,若 $F(z)\in S'_{c,m}(\lambda,\mu)$, 则 $\exists f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu)$, 使得 $F(z)=D_\mu D_\lambda^m f(z)$. 由定理 3.8.5,得到

$$D_\mu D_\lambda^m f(z)=\left\{\int_{|x|=1}\frac{1+xz}{1-xz}d\eta(x)\cdot\exp\left[-2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)\int_{|x|=1}\log(1-xz)d\xi(x)\right]\right\},$$

其中

$$z\exp\left[-2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)\int_{|x|=1}\log(1-xz)d\xi(x)\right]=D_\lambda^m(Hf(z))\in S^*\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right).$$

$$D_\lambda^m(Hf(z))=\int\frac{d\bar{\xi}(\varphi)}{(1-yz)^{2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)}}\quad(3.8.29)$$

其中 $\bar{\xi}(\varphi)$ 为连续的概率测度. 所以我们得到

$$D_\mu D_\lambda^m f(z)=\int_{X\times Y}\frac{1+xz}{1-xz}\cdot\frac{d\eta(\theta)d\bar{\xi}(\varphi)}{(1-yz)^{2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)}}\in M$$

即 $S'_{c,m}(\lambda,\mu)\subset M$, $M=\overline{C_o(S'_{c,m}(\lambda,\mu))}$. 在利用 $S'_{c,m}(\lambda,\mu)$ 与 $S_{c,m}(\lambda,\mu)$ 之间的函数关系得到(3.8.25)式. 证毕.

从定理 3.8.5,容易推出偏差定理:

定理 3.8.6 若 $\lambda\ge 0$, $\mu\ge 1$, $f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu)$, 则

$$D_\lambda^{-m}D_\mu^{-1}\frac{(1-r)}{(1+r)^{2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)+1}}\le|f(z)|\le D_\lambda^{-m}D_\mu^{-1}\frac{(1+r)}{(1-r)^{2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)+1}}$$

极值函数为

$$f(z)=D_\lambda^{-m}D_\mu^{-1}\frac{(1-xz)}{(1-xz)^{2\left(1-\frac{\mu-1}{\mu}\right)+1}}.$$

定理 3.8.7 若 $f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu),\lambda\geq 0,\mu\geq 1$, 则有不等式

$$\operatorname{Re} a_n \leq \frac{1}{(n-1)!(1+(n-1)\lambda)^m}\prod_{i=2}^{n}\left(i-2\frac{\mu-1}{\mu}\right). \tag{3.8.30}$$

证 由定理 3.8.1 知 $f(z)\in S_{c,m}(\lambda,\mu)$ 当且仅当 $D_\lambda^m(Hf(z))\in S^*\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)$. 设

$$\phi(z)=D_\lambda^m(Hf(z))=z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots, \tag{3.8.31}$$

又因为

$$D_\lambda^m(Hf(z))=z+\sum_{n=2}^{\infty}(1+(n-1)\lambda)^m \operatorname{Re}(a_n). \tag{3.8.32}$$

利用熟知的不等式

$$|b_n|\leq\frac{1}{(n-1)!}\prod_{i=2}^{n}\left(i-2\frac{\mu-1}{\mu}\right).$$

从（3.8.31）（3.8.32）两式即得（3.8.30）式成立. 证毕.

§ 3.9 用 Salagean 算子刻画的 λ 阶 K 次对称单叶函数类

本节中研究用 Salagean 算子定义的一类 K 次对称单叶函数，得到系数估计，证明包含关系、给出了类中函数的积分算子、偏差定理、覆盖性质和极值点.

1. 有关定义

用 $S_k(m)$ 来表示在单位圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内缺系数的 k 次对称单叶函数 $f(z)=z+\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}z^{kj+1}$ $(m,k\in N=\{1,2,\cdots\})$ 组成的类. $S_k(1)$ 表示 k 次对称单叶函数类. $S_k^-(m)$ 表示 $S_k(m)$ 中的函数

$$f(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}z^{kj+1}\quad\left(a_{kj+1}\geq 0,m,k\in N=\{1,2,\cdots\}\right)$$

的全体. 设函数 $f(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}z^{kj+1}, g(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}b_{kj+1}z^{kj+1}\in S_k^-(m)$, 则 $f(z),g(z)$

的 Hadamard 乘积定义为 $(f*g)(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}b_{kj+1}z^{kj+1}$.

我们在函数类 $S_m^-(k)$ 上定义 Salagean 算子： 设 $\eta\geq 0, f(z)\in S_k^-(m)$, 则

$$D_0^0f(z)=f(z), D_\eta^1f(z)=(1-\eta)f(z)+\eta zf'(z),\cdots, D_\eta^nf(z)=D_\eta\left(D_\eta^{n-1}f(z)\right)\left(n\in N\cup\{0\}\right).$$

且

$$D^nf(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}(kj\eta+1)^n a_{kj+1}z^{kj+1}\ (n\in N\cup\{0\}), \tag{3.9.1}$$

下面引进并研究用 Salagean 算子定义 $S_k^-(m)$ 的新子类：

定义 3.9.1 设 $0<\lambda\leq 1, 0\leq\eta, 0\leq\alpha, -1\leq B<A\leq 1, B\leq 0$, 若函数 $f(z)\in$ $S_k^-(m)$,满足条件

$$1+\frac{1}{\lambda}\left[(1-\alpha)\frac{D_\eta^nf(z)}{z}+\alpha\left(D_\eta^nf(z)\right)'-1\right]\prec\frac{1+Az}{1+Bz}, z\in D. \tag{3.9.2}$$

则称 $f(z)$ 属于函数类 $Q_{m,k}^-(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$ 中.当 $\alpha=0,\alpha=1$ 时，分别得到两个函数类：

$$Q_{m,k}^-(n,\lambda,\eta,A,B)=\left\{f(z)\in S_m^-(k):1+\frac{1}{\lambda}\left[\frac{D_\eta^nf(z)}{z}-1\right]\prec\frac{1+Az}{1+Bz}, z\in U\right\}.$$

$$T_{m,k}^-(n,\lambda,\eta,A,B)=\left\{f(z)\in S_m^-(k):1+\frac{1}{\lambda}\left[\left(D_\eta^nf(z)\right)'-1\right]\prec\frac{1+Az}{1+Bz}, z\in U\right\}.$$

2、系数不等式、积分算子和 Hadamard 乘积

定理 3.9.1 函数 $f(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}z^{kj+1}\in Q_{m,k}^-(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}\leq\frac{A-B}{1-B}\lambda. \tag{3.9.3}$$

证 若 $f(z)\in Q_{m,k}^-(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$，则由从属定义可知（3.9.2）式等价于

$$\left|\frac{(1-\alpha)D_\eta^n f(z)+\alpha z\left(D_\eta^n f(z)\right)'-z}{(A-B)\lambda z-B\left[(1-\alpha)D_\eta^n f(z)+\alpha z\left(D_\eta^n f(z)\right)'-z\right]}\right|$$

$$=\left|\frac{-\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}z^{kj+1}}{(A-B)\lambda z+B\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}z^{kj+1}}\right|=\left|\frac{-\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}z^{kj}}{(A-B)\lambda+B\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}z^{kj}}\right|<1,$$

（3.9.4）

从而

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}z^{kj}}{(A-B)\lambda+B\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}z^{kj}}\right\}<1,\qquad(3.9.5)$$

由于$[0,1)$中的实值函数$G(x)=(A-B)\lambda+B\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}x^{kj}\neq 0$, 且

$G(0)=(A-B)\lambda>0$, 故$G(x)>0$. 在（3.9.5）式中取$z=x\in[0,1)$, 并令$x\to 1^-$, 立得（3.9.3）式.

反之，若（3.9.3）式成立，注意到$-1\le B<A\le 1, B\le 0$, 令$|z|=1$时，我们有

$$\left|(1-\alpha)D_\eta^n f(z)+\alpha z\left(D_\eta^n f(z)\right)'-z\right|-\left|(A-B)\lambda z-B\left[(1-\alpha)D_\eta^n f(z)+\alpha z\left(D_\eta^n f(z)\right)'-z\right]\right|$$

$$=\left|-\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}z^{kj}\right|-\left|(A-B)\lambda+B\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}z^{kj}\right|$$

$$\le\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}-(A-B)\lambda-B\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n a_{kj+1}\le 0.$$

于是由最大模原理，$f(z)\in Q_{m,k}^-(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$.证毕.

如果我们取函数

$$f(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}\frac{\lambda(A-B)}{(1-B)(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^{n}}\left(1-\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{kj}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{kj-mk}z^{kj+1} \quad (3.9.6)$$

就能达到准确值，因为

$$\sum_{j=m}^{\infty}(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^{n}\cdot\frac{(A-B)\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{k}\right)}{(1-B)(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^{n}}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{k(j-m)}$$

$$=\frac{(A-B)\lambda}{1-B}\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{k}\right)\sum_{j=m}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{k(j-m)}=\frac{(A-B)\lambda}{1-B}.$$

根据定理 3.9.1，我们立得

推论 3.9.1 函数 $f(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}z^{kj+1}\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\eta,A,B)\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=m}^{\infty}(kj\eta+1)^{n}a_{kj+1}\leq\frac{A-B}{1-B}\lambda.$$

推论 3.9.2 函数 $f(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}z^{kj+1}\in T_{m,k}^{-}(n,\lambda,\eta,A,B)\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=m}^{\infty}(kj+1)(kj\eta+1)^{n}a_{kj+1}\leq\frac{A-B}{1-B}\lambda.$$

推论 3.9.3 若 $f(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$，则

$$a_{kj+1}\leq\frac{(A-B)\lambda}{(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^{n}(1-B)},\ (m,k\in N,j\geq m).$$

推论 3.9.4 设 $0\leq\alpha_1\leq\alpha_2\leq1,0\leq\eta_1\leq\eta_2$,，则

$$Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha_2,\eta_2,A,B)\subset Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha_1,\eta_1,A,B).$$

推论 3.9. 5 $Q_{m,k}^{-}(n+1,\lambda,\alpha,\eta,A,B)\subset Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B).$

定理 3.9.2 若 $f(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$，则

$$f(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\eta,A_1,B),$$

其中

$$A_1 = B + \frac{A-B}{(km\alpha+1)} \in (B, A). \tag{3.9.7}$$

证 根据定理 3.9.1，我们要找最小的 A_1，使得

$$\sum_{j=m}^{\infty} \frac{(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n(1-B)}{(A_1-B)\lambda} a_{kj+1} \le 1. \tag{3.9.8}$$

由于 $f(z) \in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$，因而只要

$$\frac{1-B}{(A_1-B)\lambda} \le \frac{(kj\alpha+1)(1-B)}{(A-B)\lambda}. \ (m,k \in N, j \ge m)$$

即

$$A_1 \ge B + \frac{A-B}{(kj\alpha+1)}. \ (m,k \in N, j \ge m)$$

则（3.9.8）式成立.取形如（3.9.7）式所给的 A_1，则有 $f(z) \in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\eta,A_1,B)$.

其次，函数

$$f(z) = z - \frac{(A-B)\lambda}{(km\alpha+1)(km\eta+1)^n(1-B)} z^{mk+1}. \tag{3.9.9}$$

表明 A_1 是最好的.证毕.

定理 3.9.3 设 $c > -1$, $f(z) \in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,A_1,B)$, 则函数

$$F(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \ . \tag{3.9.10}$$

也属于 $Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,A_2,B)$. 其中

$$A_2 = B + \frac{(c+1)(A-B)}{c+1+km} \in (B, A). \tag{3.9.11}$$

且极值函数由（3.9.9）式给出.

证 由 $F(z)$ 的定义，容易推出

$$F(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}\left(\frac{c+1}{c+kj+1}\right)a_{kj+1}z^{kj+1}$$

以下与定理 2 的证明相似.从略.

定理 3.9.4 设 c 为实数且 c>-1,. $F(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$, 则（3.9.10）式定义的函数 $f(z)$ 在 $|z|<R^*$ 中是单叶的，其中

$$R^*=\inf_{j\geq m}\left\{\left(\frac{c+1}{c+kj+1}\right)\frac{(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n(1-B)}{(kj+1)(A-B)\lambda}\right\}^{\frac{1}{kj}}. \quad (3.9.12)$$

这个结果是准确的.

证 设 $F(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}b_{kj+1}z^{kj+1}$, 则由（3.9.10）式得到

$$f(z)=\frac{z^{1-c}\left[z^cF(z)\right]'}{c+1}=z-\sum_{j=m}^{\infty}\left(\frac{c+kj+1}{c+1}\right)b_{kj+1}z^{kj+1}.$$

为证明函数 $f(z)$ 在 $|z|<R^*$ 中单叶，我们只需证明 $|z|<R^*$ 中满足 $|f'(z)-1|<1$ 即可. 又因为

$$|f'(z)-1|=\left|-\sum_{j=m}^{\infty}(kj+1)\left(\frac{c+kj+1}{c+1}\right)b_{kj+1}z^{kj}\right|\leq\sum_{j=m}^{\infty}(kj+1)\left(\frac{c+kj+1}{c+1}\right)b_{kj+1}|z|^{kj}$$

如果

$$\sum_{j=m}^{\infty}(kj+1)\left(\frac{c+kj+1}{c+1}\right)b_{kj+1}|z|^{kj}<1, \quad (3.9.13)$$

则有 $|f'(z)-1|<1$.而由定理 3.9.1，可知

$$\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n(1-B)}{(A-B)\lambda}b_{kj+1}\leq 1.$$

因此，如果

$$(kj+1)\left(\frac{c+kj+1}{c+1}\right)b_{kj+1}|z|^{kj}\le\frac{(kj\alpha+1)(kj\eta+1)(1-B)}{(A-B)\lambda}b_{kj+1}$$

或者

$$|z|<\left\{\left(\frac{c+1}{c+kj+1}\right)\frac{(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n(1-B)}{(kj+1)(A-B)\lambda}\right\}^{\frac{1}{kj}}$$

（3.9.13）式就能满足，所以函数 $f(z)$ 在 $|z|<R^*$ 中是单叶的.如果取函数（3.9.6）式，就能达到准确值. 证毕.

定理 3.9.5 设函数 $f(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$，则 $f(z)$ 在 $|z|<R_1$ 中是凸的，其中

$$R_1=\inf_{j\ge m}\left\{\left(\frac{c+1}{c+kj+1}\right)\frac{(kj\alpha+1)(kj\eta+1)^n(1-B)}{(kj+1)^2(A-B)\lambda}\right\}^{\frac{1}{kj}},\qquad(3.9.14)$$

取函数（3.9.6）时上式达到准确值.

证 为了证明 $f(z)$ 在 $|z|<R_1$ 中是凸，只须证明在 $|z|<R_1$ 中 $\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|<1$ 成立.以下证明类似于定理 4，从略.

定理 3.9.6 若 $f(z),g(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$，则

$$(f*g)(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,\eta,A_3,B),$$

其中

$$A_3=B+\frac{(A-B)^2\lambda}{(km\alpha+1)(km+1)^n(1-B)}\in(B,A).\qquad(3.9.15)$$

证 设

$$f(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}z^{kj+1},\ g(z)=z-\sum_{j=m}^{\infty}b_{kj+1}z^{kj+1}\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,A,B),$$

则

$$\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}{(A-B)\lambda}a_{kj+1}\le1,\ \sum_{j=m}^{\infty}\frac{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}{(A-B)\lambda}b_{kj+1}\le1.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，得

$$\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}{(A-B)\lambda}\sqrt{a_{kj+1}b_{kj+1}}\le 1. \tag{3.9.16}$$

现在要找最小的 $A_3, B < A_3 \le 1$, 使得

$$\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}{(A_3-B)\lambda}\sqrt{a_{kj+1}b_{kj+1}}\le 1. \tag{3.9.17}$$

由于（3.9.16）只要

$$\frac{\sqrt{a_{kj+1}b_{kj+1}}}{(A_3-B)\lambda}\le\frac{1}{(A-B)\lambda}, (m,k\in N, j\ge m)$$

则（3.9.17）式成立.从（3.9.16）式，又得

$$\sqrt{a_{kj+1}b_{kj+1}}\le\frac{(A-B)\lambda}{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}$$

因而只要

$$\frac{1}{(A_3-B)\lambda}\cdot\frac{(A-B)\lambda}{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}\le\frac{1}{(A-B)\lambda}, (m,k\in N, j\ge m)$$

则（3.9.17）式成立.以下证明与定理 3.9.2 类似.从略.

其次，由（3.9.9）式定义的 $f(z)=g(z)$表明结果是正确的.证毕.

推论 3.9.6 若 $f(z), g(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,A,B)$, 则

$$(f*g)(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,A_4,B),$$

其中

$$A_4=B+\frac{(A-B)^2\lambda}{(km+1)^n(1-B)}\in(B,A).$$

推论 3.9.7 若 $f(z), g(z)\in T_{m,k}^{-}(n,\lambda,A,B)$, 则 $(f*g)(z)\in T_{m,k}^{-}(n,\lambda,A_5,B)$,

其中

$$A_5=B+\frac{(A-B)^2\lambda}{(km+1)^{n+1}(1-B)}\in(B,A).$$

3、偏差定理、覆盖性质和极值点

定理 3.9.7 设 $f(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,A,B), |z|=r,$ 则

$$r-\frac{(A-B)\lambda}{(km\alpha+1)(km+1)^n(1-B)}r^{km+1}\le|f(z)|\le r+\frac{(A-B)\lambda}{(km\alpha+1)(km+1)^n(1-B)}r^{km+1}, \quad (3.9.18)$$

$$1-\frac{(A-B)\lambda}{(km\alpha+1)(km+1)^{n-1}(1-B)}r^{km}\le|f'(z)|\le 1+\frac{(A-B)\lambda}{(km\alpha+1)(km+1)^{n-1}(1-B)}r^{km}. \quad (3.9.19)$$

（3.9.18）、（3.9.19）两式的极值函数当 $z=\mp r$ 时，由（3.9.9）式给出.

证 设 $f(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,A,B)$, 根据定理 3.9.1，可得

$$\frac{(km\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}{(A-B)\lambda}\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}\le\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}{(A-B)\lambda}a_{kj+1}\le 1. \quad (3.9.20)$$

利用（3.9.20）式，我们有

$$|f(z)|\le r+\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}r^{kj+1}\le r+r^{km+1}\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}\le r+\frac{(A-B)\lambda}{(km\alpha+1)(km+1)^n(1-B)}r^{km+1}$$

$$|f(z)|\ge r-\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}r^{kj+1}\ge r-r^{km+1}\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}\ge r-\frac{(A-B)\lambda}{(km\alpha+1)(km+1)^n(1-B)}r^{km+1}$$

由此即得（3.9.18）式成立.

又因为

$$|f'(z)|\le 1+\sum_{j=m}^{\infty}(kj+1)a_{kj+1}r^{kj}\le 1+(km+1)r^{km}\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}$$

$$|f'(z)|\ge 1-\sum_{j=m}^{\infty}(kj+1)a_{kj+1}r^{kj}\ge 1-(km+1)r^{km}\sum_{j=m}^{\infty}a_{kj+1}\cdot$$

结合（3.9.20）式，得到（3.9.19）式成立.极值函数当 $z=\mp r$ 时，由（3.9.9）式给出.证毕.

推论 3.9. 8 设 $f(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,A,B), |z|=r,$ 则

$$r-\frac{(A-B)\lambda}{(km+1)^n(1-B)}r^{km+1}\le|f(z)|\le r+\frac{(A-B)\lambda}{(km+1)^n(1-B)}r^{km+1},$$

$$1-\frac{(A-B)\lambda}{(km+1)^{n-1}(1-B)}r^{km}\le|f'(z)|\le 1+\frac{(A-B)\lambda}{(km+1)^{n-1}(1-B)}r^{km}.$$

极值函数当 $z=\mp r$ 时，由（3.9.9）$(\alpha=0)$式给出.

推论 3.9.9 设 $f(z)\in T_{m,k}^{-}(n,\lambda,A,B),|z|=r$,则

$$r-\frac{(A-B)\lambda}{(km+1)^{n+1}(1-B)}r^{km+1}\le|f(z)|\le r+\frac{(A-B)\lambda}{(km+1)^{n+1}(1-B)}r^{km+1},$$

$$r-\frac{(A-B)\lambda}{(km+1)^n(1-B)}r^{km}\le|f'(z)|\le r+\frac{(A-B)\lambda}{(km+1)^n(1-B)}r^{km}$$

的极值函数当 $z=\mp r$ 时，由（3.9.9）$(\alpha=1)$式给出.

推论 3.9.10 设 $f(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,A,B)$, 则 $f(z)$ 把单位圆盘 U 映射到包含圆盘 $|w|<1-\dfrac{(A-B)\lambda}{(km\alpha+1)(km+1)^n(1-B)}$ 的一个区域.

定理 3.9.8 设

$$f_{k(m-1)+1}(z)=z,f_{kj+1}(z)=z-\frac{(A-B)\lambda}{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}z^{kj+1}.(j=m,m+1,\cdots),$$ 则

$$f(z)\in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,A,B)\Leftrightarrow f(z)=\sum_{j=m-1}^{\infty}\mu_{kj+1}f_{kj+1}(z),\quad \mu_{kj+1}\ge 0,\ \sum_{j=m-1}^{\infty}\mu_{kj+1}=1.$$

证 设 $f(z)=\sum_{j=m-1}^{\infty}\mu_{kj+1}f_{kj+1}(z)=\mu_{k(m-1)+1}f_{k(m-1)+1}(z)+\sum_{j=m}^{\infty}\mu_{kj+1}f_{kj+1}(z)$，则

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{j=m-1}^{\infty}\mu_{kj+1}f_{kj+1}(z)=\mu_{k(m-1)+1}f_{k(m-1)+1}(z)+\sum_{j=m}^{\infty}\mu_{kj+1}f_{kj+1}(z)\\&=\mu_{k(m-1)+1}z+\sum_{j=m}^{\infty}\mu_{kj+1}\left(z-\frac{(A-B)\lambda}{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}z^{kj+1}\right)\\&=\left(\mu_{k(m-1)+1}+\sum_{j=m}^{\infty}\mu_{kj+1}\right)z-\sum_{j=m}^{\infty}\mu_{kj+1}\frac{(A-B)\lambda}{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}z^{kj+1}\end{aligned}$$

$$= z - \sum_{j=m}^{\infty} \mu_{kj+1} \frac{(A-B)\lambda}{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)} z^{kj+1}.$$

所以

$$\sum_{j=m}^{\infty} \mu_{kj+1} \frac{(A-B)\lambda}{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)} \cdot \frac{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}{(A-B)\lambda} = \sum_{j=m}^{\infty} \mu_{kj+1} = 1 - \mu_{k(m-1)+1} \le 1.$$

由此即得 $f(z) \in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,A,B)$.

反之，设 $f(z) \in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,A,B)$. 因为

$$a_{kj+1} \le \frac{(A-B)\lambda}{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}, \quad (m,k \in N, j \ge m).$$

我们可以假设

$$\mu_{kj+1} = \frac{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)}{(A-B)\lambda} a_{kj+1}, \; \mu_{k(m-1)+1} = 1 - \sum_{j=m}^{\infty} \mu_{kj+1},$$

则

$$f(z) = z - \sum_{j=m}^{\infty} a_{kj+1} z^{kj+1} = z - \sum_{j=m}^{\infty} \mu_{kj+1} \frac{(A-B)\lambda}{(kj\alpha+1)(kj+1)^n(1-B)} z^{kj+1}$$

$$= z - \sum_{j=m}^{\infty} \mu_{kj+1}\left(z - f_{kj+1}(z)\right) = \left(1 - \sum_{j=m}^{\infty} \mu_{kj+1}\right) z + \sum_{j=m}^{\infty} \mu_{kj+1} f_{kj+1}(z)$$

$$= \mu_{k(m-1)+1} z + \sum_{j=m}^{\infty} \mu_{kj+1} f_{kj+1}(z) = \sum_{j=m-1}^{\infty} \mu_{kj+1} f_{kj+1}(z).$$

证毕.

推论 3.9.11 设

$$f_{k(m-1)+1}(z) = z, \; f_{kj+1}(z) = z - \frac{(A-B)\lambda}{(kj+1)^n(1-B)} z^{kj+1}. (j = m, m+1, \cdots),$$

则

$$f(z) \in Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,A,B) \Leftrightarrow f(z) = \sum_{j=m-1}^{\infty} \mu_{kj+1} f_{kj+1}(z), \; \mu_{kj+1} \ge 0, \; \sum_{j=m-1}^{\infty} \mu_{kj+1} = 1.$$

推论 3.9.12 设

$$f_{k(m-1)+1}(z)=z, f_{kj+1}(z)=z-\frac{(A-B)\lambda}{(kj+1)^{n+1}(1-B)}z^{kj+1}.(j=m,m+1,\cdots),$$

则

$$f(z)\in T_{m,k}^{-}(n,\lambda,A,B)\Leftrightarrow f(z)=\sum_{j=m-1}^{\infty}\mu_{kj+1}f_{kj+1}(z),\ \mu_{kj+1}\geq 0,\ \sum_{j=m-1}^{\infty}\mu_{kj+1}=1.$$

问 题

1. 讨论函数类 $A(\lambda,\alpha,\beta)$ 中函数的系数不等式、渐近性和积分算子的封闭性.

2. 若 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$，则讨论 $\left||a_n|-|a_{n+1}|\right|$ 和 Fekete – Szegö 不等式 $\left|a_3-\lambda a_2^2\right|$ 的准确界.

3. 若 $A(\lambda,\alpha,\beta)$ 中的元素为 n 次对称单叶函数时讨论它的性质.

4. 若 $f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta)$，则讨论部分和 $S_n(z)=z+\sum_{k=1}^{n}a_k z^k$ 的星象半径和凸组合问题.

5. 设 $0\leq\eta, 0\leq\alpha, -1\leq B<A\leq 1, B\leq 0$, λ 为非零复数，$f(z)\in S_m^{-}(k)$,满足条件

$$1+\frac{1}{\lambda}\left[(1-\alpha)\frac{D_\eta^n f(z)}{z}+\alpha\left(D_\eta^n f(z)\right)'-1\right]\prec\frac{1+Az}{1+Bz}, z\in D.$$

则 $f(z)$ 属于函数类 $Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$ 中. 讨论 $Q_{m,k}^{-}(n,\lambda,\alpha,\eta,A,B)$ 的性质.

6. 设 $\alpha\geq 0,\beta\geq 0, z\in D$，定义函数类

$$R(\alpha,\beta)=\left\{f\in A:\mathrm{Re}\left[(1-\alpha z)(1-\beta z)\frac{D^\lambda f(z)}{z}\right]>0\right\}$$

讨论函数类 $R(\alpha,\beta)$ 的极值问题.

7. 设$\lambda>-1,\alpha\ge 0,-1\le b<a\le 1$, $f(z)\in A$, 若$\omega(z):\omega(0)=0,|\omega(z)|<1$，使得

$$\frac{z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}f(z)}+\frac{z}{1-z}=\frac{1+\left[b+(1-\alpha)(a-b)\right]\omega(z)}{1+b\omega(z)}(z\in D).$$

则称函数$f(z)\in A(\lambda,\alpha,a,b)$. 讨论函数类$A(\lambda,\alpha,a,b)$的极值问题.

8. 设$\varphi:|\varphi|\le\frac{\pi}{2},\alpha\ge 0,0\le\beta<1$. 若$f(z)\in A$满足条件

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\varphi}\left[\frac{z\left(D^{\lambda}f(z)\right)'}{D^{\lambda}f(z)}+(1-\alpha)\frac{z}{1-z}\right]\right\}>\beta\cos\varphi$$

则称$f(z)\in A(\lambda,\alpha,\beta,\varphi)$. 讨论函数类$A(\lambda,\alpha,\beta,\varphi)$的性质.

9. 设 $-1\le b<a\le 1$, 若$f(z)\in A$,满足条件

$$\frac{zf'(z)}{f(z)-f(-z)}\prec\frac{1+az}{1+bz},z\in D.$$

则$f(z)$属于函数类$S(a,b)$中. 讨论$S(a,b)$的性质.

10. 设$0\le\alpha,-1\le b<a\le 1$, 函数$g(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$在$D$内解析，若满足条件

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}+(1-\alpha)\frac{1+z}{1-z}\prec\frac{1+az}{1+bz},z\in D.$$

则称$g(z)\in R(\alpha,a,b)$.讨论函数类$R(\alpha,a,b)$的性质.

第四章 某些解析函数类的拓广

经典的共形映射和解析单叶函数理论已有相当长的历史，并取得了丰硕的成果.近二十年来,这一理论不断地向纵深发展，例如 Bieberbach 猜想被证实、共形映射的边界性质取得新进展. 多叶函数和单叶调和函数便是解析单叶函数理论发展的一个纵向延拓.本章中我们把解析单叶函数中的某些函数类推广到多叶解析函数和调和函数中，并得到相应的性质.

§4.1 有关 P 叶α级预星象函数的解析函数类

在本节中定义函数类$Q_p(\lambda,\alpha)$，利用一阶微分从属证明关于此类中函数的包含关系、讨论积分算子，得到准确实部不等式，并对 $Q_P(\lambda,\alpha)$上的凸组合函数作数量估计.

设$A_p\ (p\in N)$表示单位圆盘D内形为$f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots$的解析函数构成的类.$A_P$中的函数$f(z)$如果满足条件

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha p \tag{4.1.1}$$

则称$f(z)$属于 P 叶α级星象函数$S_p^*(\alpha)$; 如果满足条件

$$\frac{z^p}{(1-z)^{2p(1-\alpha)}}*f(z)\in S_p^*(\alpha). \tag{4.1.2}$$

则称$f(z)$属于 P 叶α级预星象函数类$R_P(\alpha)$,$R_1(\alpha)=R(\alpha)$.

对于实数$\lambda>-p$和$f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots\in$ A_P，定义算子$D^{\lambda+p-1}$：

$$D^{\lambda+p-1}f(z)=\frac{z^p}{(1-z)^{\lambda+p}}*f(z)=z^p+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda+p)\cdots(\lambda+p+n-1)}{n!}a_{n+p}z^{n+p}\quad, \tag{4.1.3}$$

当$p=1$时算子$D^{\lambda+p-1}$为 RUSCHEWEY 导数. 由（4.1.3）式推出恒等式

$$z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'=(\lambda+p)D^{\lambda+p}f(z)-\lambda D^{\lambda+p-1}f(z) \quad (4.1.4)$$

引进并研究函数类$Q_p(\lambda,\alpha)$ [37][38]：

定义 4.1.1 如果函数$f(z)\in A_p$满足条件

$$\mathrm{Re}\frac{D^{\lambda+p}f(z)}{D^{\lambda+p-1}f(z)}>\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p},(\lambda>-p,0\le\alpha<1,z\in U), \quad (4.1.5)$$

则称$f(z)$在$Q_P(\lambda,\alpha)$中. 显然$Q_p(1-p,\alpha)\in S_p^*(\alpha),Q_1(\lambda,\alpha)=Q_\lambda(\alpha)$[39].

1. $Q_P(\lambda,\alpha)$与$S_p^*(\alpha)$及$R_P(\alpha)$之间的关系

定理 4.1.1 函数$f(z)\in Q_P(\lambda,\alpha)$当且仅当$D^{\lambda+p-1}f(z)\in S_p^*(\alpha)$.

证 若$f(z)\in Q_P(\lambda,\alpha)$，利用恒等式（4.1.4），得到

$$\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'}{D^{\lambda+p-1}f(z)}=\frac{D^{\lambda+p}f(z)}{D^{\lambda+p-1}f(z)}(\lambda+p)-\lambda, \quad (4.1.6)$$

（4.1.6）两边取实部并利用（4.1.5）式即得$D^{\lambda+p-1}f(z)\in S_p^*(\alpha)$. 证毕.

定理 4.1.2 函数$f(z)\in R_P(\alpha)$当且仅当$D^{\lambda+p-1}f(z)\in Q_p\left(2p(1-\alpha)-1,\alpha\right)$.

证 设$f(z)\in R_P(\alpha)$，则由$R_P(\alpha)$的定义可知$f(z)\in R_P(\alpha)$当且仅当

$$\frac{z^p}{(1-z)^{2p(1-\alpha)}}=\frac{z^p}{(1-z)^{p(1-2\alpha)+p}}*f(z)=D^{\lambda_0}f(z), \quad (4.1.7)$$

$$\lambda_0=p(1-2\alpha)+p-1.$$

由定理 4.1.1 可得$f(z)\in R_P(\alpha)$当且仅当$D^{\lambda_0}f(z)\in S_p^*(\alpha)$, 再利用恒等式（4.1.4）即得$D^{\lambda+p-1}f(z)\in Q_p\left(2p(1-\alpha)-1,\alpha\right)$. 证毕.

2. 包含关系 积分算子

定理 4.1.3 设 $\lambda > \frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p} p, \alpha<1$, 则 $Q_p(\lambda+1,\alpha) \in Q_p(\lambda,\alpha)$.

证 设 $f(z) \in Q_p(\lambda+1,\alpha)$, 由定理 4.1.1 知 $D^{\lambda+p-1} f(z) \in S_p^*(\alpha)$. 置

$$\frac{z\left(D^{\lambda+p-1} f(z)\right)'}{D^{\lambda+p-1} f(z)} = \frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}\right)\omega(z)}{1-\omega(z)}, \tag{4.1.8}$$

则 $\omega(z)$ 在 D 内解析或亚纯，且 $\omega(0)=1$. 利用恒等式（4.1.4）把（4.1.8）式写成

$$(\lambda+p)\frac{D^{\lambda+p} f(z)}{D^{\lambda+p-1} f(z)} = \frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}\right)\omega(z)}{1-\omega(z)},$$

上式两边取对数导数，再利用（4.1.4）得到

$$\phi(z) = \frac{z\left(D^{\lambda+p} f(z)\right)'}{D^{\lambda+p} f(z)} = \frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}\right)\omega(z)}{1-\omega(z)} p +$$

$$\frac{1+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}+1\right)z\omega'(z)}{\left(1-\omega(z)\right)\left[\lambda+p+p\left(1-2\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}-\alpha\right)\omega(z)\right]},$$

假若存在 $z_0 \in D$ 使得 $\max|\omega(z)| = |\omega(z_0)| = 1$. 由 Jaca 引理产生

$z_0\omega'(z_0) = k\omega(z_0), k \geq 1$. 因此记 $\omega(z_0) = e^{i\theta}$, 从 $\phi(z)$ 的式子，可得

$$\left|\frac{\phi(z_0)-p}{\phi(z_0)+\left(1-2\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}\right)p}\right|^2 = \left|\frac{k+\lambda+p+\left(\left(1-2\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}\right)p-\lambda\right)e^{i\theta}}{\lambda+p+\left(\left(1-2\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}\right)p-(\lambda-k)\right)e^{i\theta}}\right|^2$$

$$= 1 + \frac{M(t)}{\left|\lambda+p+\left(\left(1-2\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}\right)p-(\lambda-k)\right)e^{i\theta}\right|^2},$$

这里$t=\cos\theta, M(t)=4t(1-t)\left(\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}p+\lambda\right)$.

注意 $M(1)=0, M(-1)=8k\left(\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}p+\lambda\right), \lambda>-\frac{\lambda+\alpha p}{\lambda+p}p$,所以$M(-1)>0$.可见$M(t)\geq 0$.但这与条件$f(z)\in Q_p(\lambda+1,\alpha)$矛盾.从而在$D$内$|\omega(z)|<1$,且从（4.1.8）得$D^{\lambda+p-1}f(z)\in S_p^*(\alpha)$.根据定理 4.1.1 推出$f(z)\in Q_p(\lambda,\alpha)$. 证毕.

定理 4.1.4 设 $0\leq\alpha<1, c$是实数且$c\geq(1-2\alpha)p$, $f(z)\in Q_p\left(\lambda,\alpha p-\frac{(1-\alpha)p}{2(c+\alpha p)}\right)$,

则

$$F(z)=\frac{c+p}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f(t)dt\in Q_p(\lambda,\alpha).$$

证 记

$$R=Sup\left\{r:\frac{D^{\lambda+p-1}F(z)}{z^p}\neq 0,|z|<r<1\right\}.$$

在圆盘$|z|<R$内用

$$\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}F(z)\right)'}{D^{\lambda+p-1}F(z)}=\alpha p+p(1-\alpha)\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}, \tag{4.1.9}$$

定义的函数$\omega(z)$解析，$\omega(z)\neq 0, \omega(0)=0$.从$F(z)$的定义容易推出

$$z(F(z))'=(c+p)f(z)-cF(z).$$

由此得到

$$z\left(D^{\lambda+p-1}F(z)\right)'=(c+p)D^{\lambda+p-1}f(z)-cD^{\lambda+p-1}F(z), \tag{4.1.10}$$

从（4.1.9）和（4.1.10）式得

$$(c+p)\frac{D^{\lambda+p-1}f(z)}{D^{\lambda+p-1}F(z)}=c+\alpha p+p(1-\alpha)\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}, \tag{4.1.11}$$

（4.1.11）式两边取对数导数，得到

$$\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'}{D^{\lambda+p-1}f(z)}=\alpha p+p(1-\alpha)\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}+2p(1-\alpha)\cdot$$

$$\left[c+\alpha p+p(1-\alpha)\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}\right]^{-1}\frac{z\omega'(z)}{\left(1-\omega(z)\right)^2}\left(|z|<R\right). \qquad (4.1.12)$$

我们只要证明$|\omega(z)|<1$. 若不然，存在点$z_0, 0<|z_0|<R$, 使得$|z|\le|z_0|$时，

$|\omega(z)|\le|\omega(z_0)|=1$. 由 Jaca 引理知$|\omega(z)|<1$. $\frac{z_0\omega'(z_0)}{\omega(z_0)}=\beta, \beta\ge 1$. 记$\omega(z_0)=e^{i\theta}$,

$\theta\in(0,2\pi)$. 在点z_0，取（4.1.12）式两边实部并利用$c\ge(1-2\alpha)p$，得到

$$\operatorname{Re}\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}F(z)\right)'}{D^{\lambda+p-1}F(z)}\Big|_{z=z_0}=\alpha p-\frac{\beta p(1-\alpha)(c+\alpha p)}{p^2(1-\alpha)^2+(c+p)\left[p(1-2\alpha)-c\right]\cos\theta_0}\le\alpha p-\frac{p(1-\alpha)}{2(c+\alpha p)},$$

与已知条件矛盾.于是有（4.1.9）可知$D^{\lambda+p-1}F(z)$在$|z|<R$内属于p叶星象函数.由此可断定$R=1$.因而$D^{\lambda+p-1}F(z)\in S_p^*(\alpha)$.再利用定理 4.1.1 得到$F(z)\in Q_p(\lambda,\alpha)$. 证毕.

3、实部不等式

定理 4.1.5 设$0\le\alpha<1$, $\lambda>-p, f(z)\in Q_p(\lambda,\alpha)$, 则有

$$\left[\frac{D^{\lambda+p-1}f(z)}{z^p}\right]^\beta\prec\frac{1}{(1-z)^{2p\beta(1-\alpha)}}, z\in U \qquad (4.1.13)$$

其中$0<2p\beta(1-\alpha)\le 1$, 该结果为最佳的.

证 定义函数$p(z)$如下

$$p(z)=\left[\frac{D^{\lambda+p-1}f(z)}{z^p}\right]^\beta, z\in U \qquad (4.1.14)$$

由$D^{\lambda+p-1}f(z)$的定义可知，$p(z)$是定义在单位圆D上的解析函数，而且满

$p(0)=1$,（4.1.14）式两端取对数导数，便有

$$\beta p\left[\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'}{pD^{\lambda+p-1}f(z)}-1\right]=\frac{zp'(z)}{p(z)} \qquad (4.1.15)$$

由定理 4.1.1 可知 $D^{\lambda+p-1}f(z)\in S_p^*(\alpha)$, 所以满足 $\mathrm{Re}\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'}{pD^{\lambda+p-1}f(z)}>\alpha$, 而它等价于 $\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'}{pD^{\lambda+p-1}f(z)}\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$, 而 $\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'}{pD^{\lambda+p-1}f(z)}\Big|_{z=0}=1$. 这样就得到

$$1+\frac{zp'(z)}{p\beta p(z)}\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$$

利用引理 3.2.1，取 $\theta(.)=1, h(z)=[1+(1-2\alpha)z](1-z)^{-1}$, 这样就有

$$\theta(p(z))+\frac{zp'(z)}{p\beta p(z)}\prec h(z),\quad \theta(0)=p(0)=h(0)=1,$$

从而方程

$$1+\frac{zp'(z)}{p\beta p(z)}=\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}. \qquad (4.1.16)$$

可求得 $q(z)=(1-z)^{-2p\beta(1-\alpha)}$ 为其解. 令 $g(z)=(q(z)-1)[2p\beta(1-\alpha)]^{-1}$, 则

$$zg'(z)=z(1-z)^{-2p\beta(1-\alpha)}, z\in U, 0<2p\beta(1-\alpha)\le 1,$$

容易验证 $zg'(z)$ 也是星象函数，所以 $g(z)$ 是凸象函数，凸象函数必单叶，故知 $q(z)$ 是方程（4.1.16）的单叶解，于是由引理 3.2.1 可知 $p(z)\prec q(z)$，并且 $q(z)$ 是最佳的. 证毕.

推论 4.1.1 设 $0\le\alpha<1$，$\lambda>-p, f(z)\in Q_p(\lambda,\alpha)$, 则有

$$\mathrm{Re}\left[\frac{D^{\lambda+p-1}f(z)}{z^p}\right]^{\beta}>\frac{1}{2^{2p\beta(1-\alpha)}}, z\in U, 0<2p\beta(1-\alpha)\le 1, \qquad (4.1.17)$$

该结果为准确的.

证 由定理 4.1.5 知，需求函数 $q(z)=(1-z)^{-2p\beta(1-\alpha)}$ 的最小值，因定理 4.1.5 给的是函数从属关系，为了讨论方便考虑 $g(z)=(q(z)-1)[2p\beta(1-\alpha)]^{-1}$, $g(z)$ 凸函数的

充要条件是$zg'(z)$是星象函数，而经过计算可知

$$zg'(z)=\frac{z}{(1-z)^{1+2p\beta(1-\alpha)}}, z\in U, 0<2p\beta(1-\alpha)\le 1,$$

容易证明上述函数是星象的，而$g(z)$是凸函数，从而$q(z)$也是凸函数. 同时$q(z)$关于实轴对称，并且$q(0)=1$,可以肯定$\operatorname{Re}q(z)$的最小值必在实轴上达到. 考察函数$q(z)$便知$\operatorname{Re}q(z)>2^{-2p\beta(1-\alpha)}$，证毕.

注 在推论 4.1.1 中$p=1$时，就得到$Q_\lambda(\alpha)$[39]中函数的实部不等式.

4、凸组合函数的数量估计

定理 4.1.6 设$0\le\alpha<1$，$\lambda>-p, 0\le\mu<1, f(z)\in Q_p(\lambda,\alpha)$,令

$$F(z)=(1-\mu(\lambda+1))D^{\lambda+p-1}f(z)+\mu(\lambda+p)D^{\lambda+p}f(z)$$

那么当$z\in U, |z|=r$时，有

$$\left|\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|\le p\frac{1+(1-2\alpha)r}{1-r}+2(1-m)\frac{r}{(1-r)[1-|2m-1|r]}. \tag{4.1.18}$$

其中$m=(1-\mu+p\alpha\mu)/(1-\mu+p\mu)$,估计是准确的. 极值函数限于

$$D^{\lambda+p-1}f(z)=z^p(1-\eta z)^{-2p(1-\alpha)}, |\eta|=1.$$

证 设 $f(z)\in Q_p(\lambda,\alpha)$,根据定理 4.1.1 可知$D^{\lambda+p-1}f(z)\in S_p^*(\alpha)$，所以当$|z|=r<1$时，有

$$\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'}{pD^{\lambda+p-1}f(z)}\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}. \tag{4.1.19}$$

由恒等式（4.1.4）和$F(z)$的定义，得

$$F(z)=(1-\mu)D^{\lambda+p-1}f(z)+\mu z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)' \tag{4.1.20}$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(z)}{(1-\mu+p\mu)D^{\lambda+p-1}f(z)}\right]\ge\frac{1-\mu+p\alpha\mu}{1-\mu+p\mu},$$

令 $m=(1-\mu+p\alpha\mu)/(1-\mu+p\mu)$，显然，$0\le m<1$，从而当 $z\in D$ 时，

$$\frac{1}{1-m}\operatorname{Re}\left[\frac{F(z)}{(1-\mu+p\mu)D^{\lambda+p-1}f(z)}-m\right]\ge 0$$

于是在 D 中解析函数 $\omega(z),\omega(0)=0,|\omega(z)|\le 1$，使得

$$\frac{1}{1-m}\operatorname{Re}\left[\frac{F(z)}{(1-\mu+p\mu)D^{\lambda+p-1}f(z)}-m\right]=\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}$$

于是

$$\frac{F(z)}{(1-\mu+p\mu)D^{\lambda+p-1}f(z)}=\frac{1+(1-2m)\omega(z)}{1-\omega(z)},$$

取 $p(z)=\dfrac{1+(1-2m)\omega(z)}{1-\omega(z)}$，由于 $F(z)=(1-\mu+p\mu)D^{\lambda+p-1}f(z)\cdot p(z)$，求对数导数得到

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'}{D^{\lambda+p-1}f(z)}-2(1-m)\frac{z\omega'(z)}{(1+\omega(z))[1+(2m-1)\omega(z)]}$$

由三角不等式和定理 4.1.1，并利用 schwarz 引理，得到

$$\left|\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|\le p\frac{1+(1-2\alpha)r}{1-r}+2(1-m)\frac{r}{1-r^2}\cdot\frac{1+|\omega(z)|}{1-|(2m-1)\omega(z)|}$$

由于 $|\omega(z)|\le|z|=r$，所以当 $r<1$ 时，从上式即得（4.1.18）. 当

$$D^{\lambda+p-1}f(z)=z^p(1-\eta z)^{-2p(1-\alpha)},\ |\eta|=1$$

时，等式成立. 证毕.

注 在定理 **4.1.6** 中，P=1 时得到 $Q_\lambda(\alpha)$[39] 中凸组合函数的数量估计.

5. 系数与参数的关系

定理 4.1.7 设 $f(z)\in Q_p(\lambda,\alpha)$，则

$$\left|d_{k,p,\lambda}\right|\le 2p(1-\alpha),\qquad (4.1.21)$$

$$d_{k,p,\lambda}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & (\lambda+p)a_{p+1} & \cdots & 0 \\ (\lambda+p)a_{p+1} & 1 & 0 & \cdots & (\lambda+p)(\lambda+p+1)a_{p+2} & \cdots & 0 \\ \frac{(\lambda+p)(\lambda+p+1)a_{p+2}}{2!} & (\lambda+p)a_{p+1} & 1 & \cdots & \frac{(\lambda+p)(\lambda+p+1)(\lambda+p+2)a_{p+3}}{2!} & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{(\lambda+p)\cdots(\lambda+p+k-3)a_{p+k-2}}{(k-2)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{(\lambda+p)\cdots(\lambda+p+k-2)a_{p+k-1}}{(k-3)!} & \cdots & 0 \\ \frac{(\lambda+p)\cdots(\lambda+p+k-2)a_{p+k-1}}{(k-1)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{(\lambda+p)\cdots(\lambda+p+k-1)a_{p+k+1}}{(k-2)!} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

证　设 $f(z)\in Q_p(\lambda,\alpha)$, 则由定理 4.1.1 可知 $D^{\lambda+p-1}f(z)\in S_p^*(\alpha)$. 置

$$\frac{z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'}{D^{\lambda+p-1}f(z)}=\alpha p+p(1-\alpha)p(z), \tag{4.1.22}$$

则 $\operatorname{Re}p(z)>0, p(0)=1$, 于是 $p(z)\in P$. 设

$$p(z)=1+b_1z+\cdots, \tag{4.1.23}$$

（4.1.22）式消去分母，得

$$z\left(D^{\lambda+p-1}f(z)\right)'=\alpha pD^{\lambda+p-1}f(z)+p(1-\alpha)p(z)D^{\lambda+p-1}f(z),$$

把 $D^{\lambda+p-1}f(z),p(z)$ 的幂级数展开式代入上式中，并且比较两端同次幂的系数，就得到

$$\begin{cases} b_1=\dfrac{(\lambda+p)}{(1-\alpha)p}a_{p+1} \\ (\lambda+p)a_{p+1}b_1+b_1=\dfrac{(\lambda+p)(\lambda+p+1)}{p(1-\alpha)}a_{p+2} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{(\lambda+p)\cdots(\lambda+p+n-1)}{2!}a_{p+n-1}b_1+(\lambda+p)a_{p+1}b_{n-2}+b_{n-1}=\dfrac{(\lambda+p)\cdots(\lambda+p+n-2)}{(n-2)!p(1-\alpha)}a_{p+n-1} \\ \dfrac{(\lambda+p)\cdots(\lambda+p+n-2)}{(n-1)!}a_{p+n}b_1+\cdots+(\lambda+p)a_{p+1}b_{n-1}+b_n=\dfrac{(\lambda+p)\cdots(\lambda+p+n-1)}{(n-1)!p(1-\alpha)}a_{p+n} \end{cases}$$

（4.1.24）

关于未知数 $b_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ 方程组（4.1.24）的未知数和方程的个数相同，根据线

性方程组的理论，方程组（4.1.24）有唯一的一组解，且它的系数行列式等于 1，由克莱姆规则即得

$$b_k=\frac{1}{p(1-\alpha)}d_{k,p,\lambda}, \tag{4.1.25}$$

利用推论 2.1.2 可知 $|b_k|\le 2$，从上式推出（4.1.21）.证毕.

§4.2 一类γ阶的 K 次对称 P 叶函数

本节中引进并研究用 Salagean 算子定义的一类γ阶的 K 次对称 P 叶函数 $T_{n,k}^{-}(p,\gamma)$，得到系数估计，证明包含关系，给出类中函数的积分算子，偏差定理，覆盖性质和极值点. 所得结论推广文[40]–[44]中的相关结果.

1. 有关定义

用$A_k(p)$ 来表示在单位圆盘$U=\{z:|z|<1\}$内的形为

$$f(z)=z^p+\sum_{j=k}^{\infty}a_{p+kj}z^{p+kj}\ (p,j\in N=\{1,2,\cdots\}), \tag{4.2.1}$$

的 K 次对称 P 叶函数的全体组成的类. Aouf 在［40］中研究了函数类$A_1(p)$.

我们用$T_k^{-}(p)$ 表示函数类$A_k(p)$中具有形式

$$f(z)=z^p-\sum_{j=k}^{\infty}a_{p+kj}z^{p+kj}\ (a_{p+kj}\ge 0,p,j\in N=\{1,2,\cdots\}) . \tag{4.2.2}$$

的函数 $f(z)$ 的全体.用$S_k^{*,-}(p,\alpha),C_k^{-}(p,\alpha)$分别表示$T_k^{-}(p)$中的$\alpha$级星象函数，$\alpha$级凸象函数类.

我们在函数类$A_k(p)$上定义 Salagean 算子：设$f(z)\in A_k(p)$, 则

$$D^0f(z)=f(z),\ D^1f(z)=zf'(z),\cdots,D^nf(z)=D(D^{n-1}f(z))(n\in N\cup\{0\}). \tag{4.2.3}$$

且

$$D^n f(z)=p^n z^p+\sum_{j=k}^{\infty}(p+kj)^n a_{p+kj} z^{p+kj}\ (n\in N\cup\{0\}), \qquad (4.2.4)$$

我们定义如下解析函数类：

定义 4.2.1 设$\gamma>0$，$n,p\in N$, $n\in N\cup\{0\}$,用$S_{n,k}(p,\gamma)$表示函数类：

$$S_{n,k}(p,\gamma)=\left\{f(z)\in A_k(p):\mathrm{Re}\left[1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}-p\right)\right]>0, z\in U\right\}.$$

我们用 $T^-_{n,k}(p,\gamma)$ 表示函数类

$$T^-_{n,k}(p,\gamma)=\left\{f(z)\in T^-_k(p):\mathrm{Re}\left[1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}-p\right)\right]>0, z\in U\right\}$$

显然 $T^-_{n,k}(p,\gamma)\subset S_{n,k}(p,\gamma), T^-_{0,1}(p,p-\alpha)=S_1^{*,-}(p,\alpha), T^-_{1,1}(p,p-\alpha)=C_1^-(p,\alpha); (0\le\alpha\le p)$.

OWa 在［41］中研究了函数类$S_1^{*,-}(p,\alpha)$和$C_1^-(p,\alpha)$；Salagean 在［42］中研究了函数类$S_{n,1}(1,1-\alpha)=S_n(\alpha)$, Silverman 在［43］中研究了 $S_1^{*,-}(1,\alpha)$和$C_1^-(1,\alpha)$；Sezgin Akbülut 在［44］中研究了 $S_{n,1}(p,\gamma)$ 和$T^-_{n,1}(p,\gamma)$.

2. 系数不等式 包含关系 积分算子

定理 4.2.1. 设 $f(z)=z^p+\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+kj}z^{p+kj}$.若

$$\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)^n(\gamma+kj)\left|a_{p+kj}\right|\le\gamma p^n \qquad (4.2.5)$$

则$f(z)\in S_{n,k}(p,\gamma)$.

证 要使$f(z)\in S_{n,k}(p,\gamma)$.只要证明

$$\left|1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n}f(z)}\right)-p\right|\leq \gamma p^{n}.$$

即可.

因为

$$\left|\left\{1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n}f(z)}\right)-p\right\}-1\right|=\left|\frac{D^{n+1}f(z)-pD^{n}f(z)}{\gamma D^{n}f(z)}\right|=\frac{\left|\sum_{j=1}^{\infty}kj(p+kj)^{n}a_{p+kj}z^{p+kj}\right|}{\left|\gamma\left(p^{n}+\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)^{n}a_{p+kj}z^{p+kj}\right)\right|}$$

$$\leq\frac{\sum_{j=1}^{\infty}kj(p+kj)^{n}|a_{p+kj}|}{\gamma\left(p^{n}-\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)^{n}|a_{p+kj}|\right)}. \tag{4.2.6}$$

另一方面

$$\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)^{n}(\gamma+kj)|a_{p+kj}|\leq\gamma p^{n}\Rightarrow\sum_{j=1}^{\infty}kj(p+kj)^{n}|a_{p+kj}|+\sum_{j=1}^{\infty}\gamma(p+kj)^{n}|a_{p+kj}|\leq\gamma p^{n}$$

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{\infty}kj(p+kj)^{n}|a_{p+kj}|\leq\gamma p^{n}-\sum_{j=1}^{\infty}\gamma(p+kj)^{n}|a_{p+kj}|\Rightarrow\frac{\sum_{j=1}^{\infty}kj(p+kj)^{n}|a_{p+kj}|}{\gamma\left(p^{n}-\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)^{n}|a_{p+kj}|\right)}\leq 1.$$

从而得到

$$\left|\left\{1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n}f(z)}\right)-p\right\}-1\right|\leq\gamma p^{n}$$

由此 $f(z)\in S_{n,k}(p,\gamma)$. 证毕.

定理 4.2.2. 设函数 $f(z)=z^{p}-\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+kj}z^{p+kj}\in T_{n,k}^{-}(p,\gamma)\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)^{n}(\gamma+kj)a_{p+kj}\leq\gamma p^{n}\ . \tag{4.2.7}$$

证明: 若 $f(z)\in T_{n,k}^{-}(p,\gamma)$, 则

$$\left|\frac{1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}-p\right)-1}{1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}-p\right)+1}\right|=\left|\frac{-\sum_{j=1}^{\infty}kj(p+kj)^n a_{p+kj}z^{kj}}{2\gamma p^n-\sum_{j=1}^{\infty}(2\gamma+kj)(p+kj)^n a_{p+kj}z^{kj}}\right|<1, z\in D. \quad (4.2.8)$$

从而

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{\infty}kj(p+kj)^n a_{p+kj}z^{kj}}{2\gamma p^n-\sum_{j=1}^{\infty}(2\gamma+kj)(p+kj)^n a_{p+kj}z^{kj}}\right\}<1, z\in D. \quad (4.2.9)$$

由于 $[0,1]$ 中的实值函数 $G(x)=2\gamma p^n-\sum_{j=1}^{\infty}(2\gamma+kj)(p+kj)^n a_{p+kj}x^{kj}\neq 0$, 且 $G(0)=2\gamma p^n>0$, 故 $G(z)>0$. 在（4.2.9）中取 $z=x\in[0,1)$, 并令 $x\to 1^-$, 立得（4.2.7）式.

反之，若（4.2.7）式成立，则令 $|z|=1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}&\left|1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}-p\right)-1\right|-\left|1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}-p\right)+1\right|\\ &=\left|\frac{-\sum_{j=1}^{\infty}kj(p+kj)^n a_{p+kj}z^{p+kj}}{\gamma\left[p^n z^p-\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)^n a_{p+kj}z^{p+kj}\right]}\right|-\left|\frac{2\gamma p^n-\sum_{j=1}^{\infty}(2\gamma+kj)(p+kj)^n a_{p+kj}z^{p+kj}}{\gamma\left[p^n z^p-\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)^n a_{p+kj}z^{p+kj}\right]}\right|\\ &\leq\frac{-2\left[\gamma p^n-\sum_{j=1}^{\infty}kj(p+kj)^n a_{p+kj}\right]}{\gamma\left[p^n z^p-\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)^n a_{p+kj}\right]}\leq 0.\end{aligned}$$

从而，由最大模原理即得 $f(z)\in T_{n,k}^{-}(p,\gamma)$. 证毕.

从定理 4.2.1，我们容易得到

推论 4.2.1

$$a_{p+kj}\leq\frac{\gamma p^n}{(p+kj)^n(\gamma+kj)}.$$

推论 4.2.2 $T^{-}_{n+1,k}(p,\gamma)\subset T^{-}_{n,k}(p,\gamma)$.

定理 4.2.3. 设 $f(z)\in T^{-}_{n,k}(p,\gamma)$, 则

$$F(z)=\frac{c+p}{z^{p}}\int_{0}^{z}t^{c-1}f(t)dt\in T^{-}_{n,k}(p,\gamma_1).$$

其中

$$\gamma_1=\frac{kj(c+p)}{(k+\gamma)(c+p+k)-(c+p)}. \tag{4.2.10}$$

且该结果为准确的，极值函数为

$$f(z)=z^{p}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma p^{n}}{(p+k)^{n}(\gamma+k)}z^{p+kj}. \tag{4.2.11}$$

证 因 $f(z)\in T^{-}_{n,k}(p,\gamma)$, 由 $F(z)$ 的定义得到

$$F(z)=z^{p}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c+p}{c+p+kj}a_{p+kj}z^{p+kj} \tag{4.2.12}$$

根据定理 4.2.2，我们找最小的 γ_1, 使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)^{n}\frac{\gamma_1+kj}{\gamma_1 p^{n}}\frac{c+p}{c+p+kj}a_{p+kj}\le 1. \tag{4.2.13}$$

由于 $f(z)\in T^{-}_{n,k}(p,\gamma)$, 因而只要

$$\frac{\gamma_1+kj}{\gamma_1 p^{n}}\frac{c+p}{c+p+kj}\le\frac{\gamma+kj}{\gamma p^{n}}\qquad (j,k\in N).$$

即

$$\gamma_1\ge\frac{kj(c+p)}{(kj+\gamma)(c+p+kj)-(c+p)}.$$

则（4.2.13）成立.取形如（4.2.10）所给的 γ_1, 则有 $F(z)\in T^{-}_{n,k}(p,\gamma)$.

其次，函数（4.2.11）表明 γ_1 是最好的. 证毕.

2. 偏差定理 极值点

定理 4.2.5 若 $f(z)\in T^{-}_{n,k}(p,\gamma)$, $|z|=r$; 则

$$r^p-\frac{\gamma p^n}{(\gamma+k)(p+k)^n}r^{p+k}\le|f(z)|\le r^p+\frac{\gamma p^n}{(\gamma+k)(p+k)^n}r^{p+k}, \quad (4.2.14)$$

$$pr^{p-1}-\frac{\gamma p^n}{(\gamma+k)(p+k)^{n-1}}r^{p+k-1}\le|f'(z)|\le pr^{p-1}+\frac{\gamma p^n}{(\gamma+k)(p+k)^{n-1}}r^{p+k-1}, \quad (4.2.15)$$

其中（4.2.14）和（4.2.15）的极值函数为，当 $z=\mp r$ 时由（4.2.11）给出.

证 因 $f(z)\in T_{n,k}^{-}(p,\gamma)$，根据定理 4.2.2，得到

$$(\gamma+k)(p+k)^n\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+kj}\le\sum_{j=1}^{\infty}(\gamma+kj)(p+kj)^n a_{p+kj}\le\gamma p^n$$

即

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+kj}\le\frac{\gamma p^n}{(\gamma+k)(p+k)^n}. \quad (4.2.16)$$

利用（4.2.16）式，我们有

$$|f(z)|\le r^p+\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+kj}r^{p+kj}\le r^p+r^{p+k}\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+kj}\le r^p+\frac{\gamma p^n}{(\gamma+k)(p+k)^n}r^{p+k}, \quad (4.2.17)$$

$$|f(z)|\ge r^p-\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+kj}r^{p+kj}\ge r^p-r^{p+k}\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+kj}\ge r^p-\frac{\gamma p^n}{(\gamma+k)(p+k)^n}r^{p+k}, \quad (4.2.18)$$

由（4.2.17）（4.2.18）推出（4.2.14）成立.

再利用（4.2.16）式，进一步得到

$$|f'(z)|\le p|z|^{p-1}+\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)a_{p+kj}|z|^{p+kj-1}\le pr^{p-1}+r^{p+k-1}(p+k)\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+kj}$$

$$\le pr^{p-1}+\frac{\gamma p^n}{(\gamma+k)(p+k)^{n-1}}r^{p+k-1}, \quad (4.2.19)$$

$$|f'(z)|\ge p|z|^{p-1}-\sum_{j=1}^{\infty}(p+kj)a_{p+kj}|z|^{p+kj-1}\ge pr^{p-1}-r^{p+k-1}(p+k)\sum_{j=1}^{\infty}a_{p+kj}$$

$$\ge pr^{p-1}-\frac{\gamma p^n}{(\gamma+k)(p+k)^{n-1}}r^{p+k-1}, \quad (4.2.20)$$

由（4.2.19）（4.2.20）推出（4.2.15）成立. 证毕.

推论 4.2.3 设 $f(z)\in T_{n,k}^{-}(p,\gamma)$，$f(z)$ 把单位圆盘 D 映射到包含圆盘 $|w|<1-\frac{\gamma p^n}{(\gamma+k)(p+k)^n}$ 的一个区域.

定理 4.2.6. 设

$$f_p(z)=z^p,\ f_{p+kj}(z)=z^p-\frac{\gamma p^n}{(\gamma+kj)(p+kj)^n}z^{p+kj}\ (j=1,2,\cdots).$$

则函数 $f(z)\in T_{n,k}^-(p,\gamma)$ 当且仅当

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{p+kj}f_{p+kj}. \tag{4.2.21}$$

其中 $\lambda_{p+kj}\geq 0$，$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{p+kj}=1$.

证 若

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{p+kj}f_{p+kj}=\lambda_p f_p(z)+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{p+kj}f_{p+kj}(z).$$

则

$$\begin{aligned}
f(z)&=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{p+kj}f_{p+kj}=\lambda_p f_p(z)+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{p+kj}f_{p+kj}(z)\\
&=\lambda_p z^p+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{p+kj}\left(z^p-\frac{\gamma p^n}{(\gamma+kj)(p+kj)^n}z^{p+kj}\right)\\
&=\lambda_p z^p+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{p+kj}z^p-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{p+kj}\frac{\gamma p^n}{(\gamma+kj)(p+kj)^n}z^{p+kj}\\
&=\left(\lambda_p+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{p+kj}\right)z^p-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{p+kj}\frac{\gamma p^n}{(\gamma+kj)(p+kj)^n}z^{p+kj}\\
&=z^p-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{p+kj}\frac{\gamma p^n}{(\gamma+kj)(p+kj)^n}z^{p+kj}.
\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{p+kj}\left(\frac{\gamma p^n}{(\gamma+kj)(p+kj)^n}\right)\left(\frac{(\gamma+kj)(p+kj)^n}{\gamma p^n}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{p+kj}=1-\lambda_p.$$

由此可得 $f(z)\in T_{n,k}^-(p,\gamma)$.

反之，若函数 $f(z)\in T_{n,k}^-(p,\gamma)$. 因为

$$a_{p+kj} \le \frac{\gamma p^n}{(p+kj)^n(\gamma+kj)}.\ (j=1,2,\ldots.),$$

我们 令

$$\lambda_{p+kj} = \frac{(\gamma+kj)(p+kj)^n}{\gamma p^n} a_{p=kj}\ ,\ \lambda_p = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{p+kj}.$$

则

$$f(z) = z^p - \sum_{j=1}^{\infty} a_{p+kj} z^{p+kj} = z^p - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{p+kj} \frac{\gamma p^n}{(\gamma+kj)(p+kj)^n} z^{p+kj}$$

$$= z^p - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{p+kj}\left(z^p - f_{p+kj}(z)\right) = z^p - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{p+kj} z^p + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{p+kj} f_{p+kj}(z)$$

$$= \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{p+kj}\right) z^p + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{p+kj} f_{p+kj}(z) = \lambda_p z^p + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{p+kj} f_{p+kj}(z)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{p+kj} f_{p+kj}(z).$$

证毕.

§4.3 P 叶近于凸函数类的一个扩展

本节讨论 P 叶近于凸函数类的一个扩展. 得到包含关系,结合算子理论导出类中函数的积分表达式, 端点性质, 推出偏差定理, 证明积分平均不等式[48].

1、 有关定义

定义 4.3.1 设 $f(z) \in A_p$，若存在 $g(z) \in S_p^*(\alpha), 0 \le \alpha < 1$, 使得

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{pg(z)} > \beta, (0 \le \beta < 1, z \in D). \tag{4.3.1}$$

则称函数 $f(z) \in A_p$ 属于 P 叶函数类 $C_p(\alpha, \beta)$,

定义 4.3.2 设 $f(z) \in A_p$，若存在 $g(z) \in K_P(\alpha)$, 使得

$$\operatorname{Re}\frac{(zf'(z))'}{pg'(z)} > \beta, (0 \le \beta < 1, z \in D). \tag{4.3.2}$$

则称函数 $f(z)\in A_p$ 属于 P 叶函数类 $C_p'(\alpha,\beta)$.显然 $C_1(0,\beta)=C(\beta)$ 为熟知的 β 级近于凸函数类. $C_p(\alpha,\beta)$, $C_p'(\alpha,\beta)$ 均为近于凸函数的子类, 且

$$f(z)\in C_p'(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \left[zf'(z)/p\right] \in C_p(\alpha,\beta).$$

对给定的实数 σ, 我们用

$$H^{\sigma} f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} a_{n+p} z^{n+p}, f(z) \in A_p,$$

定义算子 H^{σ}.显然 $H^{-\sigma}H^{\sigma}f(z)=H^{\sigma}H^{-\sigma}f(z)=f(z)$, $H^{-\sigma}$ 为 H^{σ} 的逆算子.

令:

$$V_p(\sigma,\alpha)=\left\{f(z)\in A_p : \operatorname{Re}\frac{H^{\sigma}f(z)}{z^p} > \alpha, z \in D\right\}$$

$$R_p(\sigma,\alpha)=\left\{f(z)\in A_p : \operatorname{Re}\frac{(H^{\sigma}f(z))'}{pz^{p-1}} > \alpha, z \in D\right\}$$

本节中引进如下两类新的 P 叶解析函数:

定义 4.3.3 设 $f(z)\in A_p$，若存在 $g(z)\in V_p(\sigma,\alpha)$, 使得

$$\operatorname{Re}\frac{z(H^{\sigma}f(z))'}{pH^{\sigma}g(z)} > \beta, z \in D \tag{4.3.3}$$

则称函数 $f(z)\in A_p$ 属于 P 叶函数类 $C_p(\sigma,\alpha,\beta)$.

定义 4.3.4 设 $f(z)\in A_p$，若存在 $g(z)\in R_p(\sigma,\alpha)$, 使得

$$\operatorname{Re}\frac{\left(z(H^{\sigma}f(z))'\right)'}{p(H^{\sigma}g(z))'} > \beta, z \in D \tag{4.3.4}$$

则称函数 $f(z)\in A_p$ 属于 P 叶函数类 $C_p'(\sigma,\alpha,\beta)$.

从定义直接推出如下关系：

$$f(z)\in R_p(\sigma,\alpha) \Leftrightarrow \frac{z(H^{\sigma}f(z))'}{p} \in V_p(\sigma,\alpha), \tag{4.3.5}$$

$$f(z)\in C_P'(\sigma,\alpha,\beta)\Leftrightarrow \frac{z(H^{\sigma}f(z))'}{p}\in C_p(\sigma,\alpha,\beta). \tag{4.3.6}$$

当$\sigma=0$时，有

$$C_p(0,\alpha,\beta)=\left\{f(z)\in A_p:\exists g(z)\in V_p(0,\alpha),使得\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{pg(z)}>\beta,z\in D\right\}$$

$$C_p'(0,\alpha,\beta)=\left\{f(z)\in A_p:\exists g(z)\in R_p(0,\alpha),使得\operatorname{Re}\frac{(zf'(z))'}{pg'(z)}>\beta,z\in D\right\}$$

2、 包含关系

引理 4.3.1 [45] 设 $h(z)$ 在 D 内单叶凸象的，$B(z)$ 在 D 内解析且 $\operatorname{Re}B(z)\ge 0(z\in D)$. $q(z)$在 D 内解析，$q(0)=h(0)$, 且

$$q(z)+B(z)zq'(z)\prec h(z),$$

则 $q(z)\prec h(z)$.

引理 4.3.2 $R_p(\sigma,\alpha)\subset V_p(\sigma,\alpha)$.

证 设$f(z)\in R_p(\sigma,\alpha)$,则$\operatorname{Re}\left((H^{\sigma}f(z))'/pz^{p-1}\right)>\alpha$,令 $\left[H^{\sigma}f(z)/z^{p}\right]=p(z)$,并两边取导数,得到

$$\frac{(H^{\sigma}f(z))'}{pz^{p-1}}=p(z)+\frac{z}{p}p'(z), \tag{4.3.7}$$

(4.3.7)式两边取实部,并利用已知条件即得$\operatorname{Re}\left(p(z)+\frac{z}{p}p'(z)\right)>\alpha$,这等价于 $p(z)+\frac{z}{p}p'(z)\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$, 且 $B(z)=\frac{1}{p}$. 由引理 4.3.1 可知 $p(z)\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$, 即 $f(z)\in V_p(\sigma,\alpha)$,结论成立. 证毕.

注 从定义 4.3.3 和引理 4.3.2 可推出关系: $C_P'(\sigma,\alpha,\beta)\subset C_P(\sigma,\alpha,\beta)$.

定理 4.3.1 设$f(z)\in V_P(\sigma,\alpha)$,则$|z|<r_1$内$H^{\sigma}f(z)\in S_P^*$,其中$r_1$为方程

$$(1-2\alpha)pr^2+2(1-\alpha+\alpha p)r-p=0, \tag{4.3.8}$$

的最小正根.

证 设 $f(z)\in R_p(\sigma,\alpha)$,则 $\mathrm{Re}\dfrac{H^\sigma f(z)}{z^p}>\alpha$,令 $\left[H^\sigma f(z)/z^p\right]=p(z)$, 则 $p(z)$ 在 D 内解析且 $\mathrm{Re}\,p(z)>\alpha$,由正实部函数的性质：若 $p(z)\in P(\alpha)$,则对 $|z|=r<1$,有

$$\left|\frac{zp'(z)}{p(z)}\right|\le\frac{2(1-\alpha)r}{(1-r)[1+(1-2\alpha)r]}$$

得到

$$\mathrm{Re}\frac{z\left(H^\sigma f(z)\right)'}{pH^\sigma f(z)}=1+\mathrm{Re}\frac{zp'(z)}{p\cdot p(z)}\ge1-\left|\frac{zp'(z)}{p\cdot p(z)}\right|\ge\frac{p-2(1-\alpha+\alpha p)r-(1-2\alpha)pr^2}{p(1-r)\left[1+(1-2\alpha)r\right]},$$

令 $\varphi(r)=p-2(1-\alpha p+p)r-(1-2\alpha)pr^2$, $\varphi(r)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $\varphi(0)=p>0,\ \varphi(1)=-2(1-\alpha)<0$

从而方程(4.3.8)在 $(0,1)$ 内有最小正根，即在 $|z|<r_1$ 内 $H^\sigma f(z)\in S_P^*$. 证毕.

推论 4.3.1 设 $f(z)\in V_P(0,\alpha)$,则 $|z|<r_1$ 内 $f(z)\in S_P^*$,其中 r_1 为 $\sigma=0$ 时,方程(4.3.8)的最小正根.

用相同的方法得到

定理 4.3.2 设 $f(z)\in R_P(\sigma,\alpha)$,则 $|z|<r_1$ 内 $H^\sigma f(z)\in K_P^*$,其中 r_1 为方程(4.3.8)的最小正根.

推论 4.3.2 设 $f(z)\in R_P(0,\alpha)$,则 $|z|<r_1$ 内 $f(z)\in K_P^*$,其中 r_1 为 $\sigma=0$ 时,方程(4.3.8)的最小正根.

注 从推论 4.3.1 和推论 4.3.2 可知，在 $|z|<r_1$ 内 $C_P'(0,\alpha,\beta),C_P(0,\alpha,\beta)$ 均为近于凸函数类，所以在 D 内 $C_P'(\sigma,\alpha,\beta),C_P(\sigma,\alpha,\beta)$ 为近于凸函数的一个扩展.

3、 积分表达式

若 $g(z)\in V_p(\sigma,\alpha)$,则由 P 中函数的 Herglots 表示公式容易得到

引理 4.3.3 设 $g(z)\in V_p(\sigma,\alpha)$, 则存在 $X=\{x:|x|=1\}$ 上的左连续的概率测度 $\gamma(x)$, 使得

$$g(z)=H^{-\sigma}\left[z^p\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\alpha)xz}{1-xz}d\gamma(x)\right].$$

对于固定的 σ,α, $V_p(\sigma,\alpha)$ 与 X 上的概率测度点 γ 以上述关系式构成一一对应.

定理 4.3.3 函数 $f(z)\in C_p(\sigma,\alpha,\beta)$ 当且仅当存在 $X=\{x:|x|=1\}$ 上的左连续的概率测度 $\mu(x),\gamma(x)$, 使得

$$f(z)=H^{-\sigma}\left\{\int_0^z\left[pz^{p-1}\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz}d\mu(x)\cdot\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\alpha)xz}{1-xz}d\gamma(x)\right]dz\right\}, \quad (4.3.9)$$

当 $\sigma=0$ 时,

$$f(z)=\int_0^z\left[pz^{p-1}\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz}d\mu(x)\cdot\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\alpha)xz}{1-xz}d\gamma(x)\right]dz. \quad (4.3.10)$$

对于固定的 σ,α,β, $C_p(\sigma,\alpha,\beta)$ 与 X 上左连续的概率测度点 $\{(\mu,\gamma)\}$, 以关系式(4.3.9)构成一一对应.

证 设 $f(z)\in C_p(\sigma,\alpha,\beta)$, 则存在 $g(z)\in V_p(\sigma,\alpha)$, 使得

$$\mathrm{Re}\frac{z\left(H^{\sigma}f(z)\right)'}{pH^{\sigma}g(z)}>\beta, z\in D,$$

由引理 4.3.3 可得

$$H^{\sigma}g(z)=z^p\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\alpha)xz}{1-xz}d\gamma(x), \quad (4.3.11)$$

其中 $\gamma(x)$ 为 X 上的左连续的概率测度.

由 P 中函数的 Herglots 表示公式得

$$\frac{z\left(H^{-\sigma}f(z)\right)'}{pH^{\sigma}g(z)}=\int_{|x|=1}\frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz}d\mu(x). \quad (4.3.12)$$

其中 $\mu(x)$ 为 X 上的左连续的概率测度.

由(4.3.11), (4.3.12)两式推出

$$\left(H^{\sigma} f(z)\right)' = pz^{p-1} \int_{|x|=1} \frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz} d\mu(x) \cdot \int_{|x|=1} \frac{1+(1+2\alpha)xz}{1-xz} d\gamma(x).$$

利用 H^{σ} 算子的可逆性,从上式即得(4.3.9)式,反之亦然;当 $\sigma=0$ 时,(4.3.9)式变为(4.3.10)式. 对于固定的 σ,α,β,因 $\{(\mu,\gamma)\}$ 与 $P\times P$ 之间构成一一对应,而 $P\times P$ 与 $C_p(\sigma,\alpha,\beta)$ 之间也是一一对应,这表明定理的后一个结论为真. 证毕.

4、 端点性质及偏差定理

定理 4.3.4 任意函数 $f(z)\in C_p(\sigma,\alpha,\beta)$，有端点的积分表示

$$f(z) = H^{-\sigma} \int_{X\times Y} \left[\int_0^z \frac{pz^{p-1}\left[1+(1-2\beta)xz\right]}{1-xz} \cdot \frac{\left[1+(1-2\alpha)yz\right]}{1-yz} dz \right] d\mu(\theta,\varphi), \quad (4.3.13)$$

其中 $x=e^{i\varphi}, y=e^{i\theta}, X=Y=\{e^{i\theta}: 0\le\theta\le 2\pi\}$, $\mu(\theta,\varphi)$ 为二元左连续的概率测度.

证 记 $\overline{C}_p(\sigma,\alpha,\beta)=\left\{\frac{\left(H^{\sigma}f(z)\right)'}{pz^{p-1}}: f(z)\in C_p(\sigma,\alpha,\beta)\right\}$, 求导运算的线性性质和 H^{σ} 算子的映射性质,我们把问题转化为 $\overline{C}_p(\sigma,\alpha,\beta)$ 函数类的讨论.

令

$$g_{x,y} = \frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz} \cdot \frac{1+(1-2\alpha)yz}{1-yz}, |x|=|y|=1,$$

$$M = \left\{ \int_{X\times Y} g_{x,y}(z) d\mu(\theta,\varphi) : \mu(\theta,\varphi) \text{为二元左连续的概率测度} \right\}.$$

由假设容易证明包含关系 $M \subseteq \overline{Co}\left(\overline{C}_p(\sigma,\alpha,\beta)\right)$. 另外:假设对任意左连续的概率测度,有

$$\int_{X\times Y} g_{x,y}(z) d\mu_1(\theta,\varphi) = \int_{X\times Y} g_{x,y}(z) d\mu_2(\theta,\varphi), \quad (4.3.14)$$

由于 $g_{x,y}(z)$ 关于 x,y 有分离形式,因此

$$\mu_i(\theta,\varphi)=\mu_i^{(1)}(\theta)\cdot\mu_i^{(2)}(\varphi)(i=1,2)$$

可唯一分解成两个独立的左连续的概率测度乘积,这样(4.3.14)式化成

$$\int_X \frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz}d\mu_1^{(1)}(\theta)\int_Y \frac{1+(1-2\beta)yz}{1-yz}d\mu_1^{(2)}=$$

$$\int_X \frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz}d\mu_2^{(1)}(\theta)\int_Y \frac{1+(1-2\alpha)yz}{1-yz}d\mu_2^{(2)} \quad . \tag{4.3.15}$$

由概率测度性质之知，(4.3.15)式唯一的,因此有 $\mu_1^{(j)}=\mu_2^{(j)}(j=1,2)$ 即

$\mu_1(\theta,\varphi)=\mu_2(\theta,\varphi)$. 由此可知 M 在 $\mu(\theta,\varphi)$ 的表示下是唯一的,根据 $g_{x,y}(z)$ 关于 x,y,z 的连续性，得到

$$extM=\left\{\frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz}\cdot\frac{1+(1-2\alpha)yz}{1-yz}:|x|=|y|=1\right\}, \tag{4.3.16}$$

又因为 $f(z)\in\overline{C}_p(\sigma,\alpha,\beta)$, 所以存在 $g(z)\in V_p(\sigma,\alpha)$, 即存在 $H^{\sigma}g(z)$ 使得

$$\frac{(H^{\sigma}f(z))'}{pz^{p-1}}=\int_X \frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz}d\mu(\theta)\cdot\int_Y \frac{1+(1-2\alpha)yz}{1-yz}d\mu(\varphi)$$

$$=\int_{X\times Y}\frac{1+(1-2\beta)xz}{1-xz}\cdot\frac{1+(1-2\alpha)yz}{1-yz}d\mu(\theta,\varphi)\in M$$

即 $\overline{C}_p(\sigma,\alpha,\beta)\subseteq M, M=\overline{C}_p(\sigma,\alpha,\beta)$, 再利用 $C_p(\sigma,\alpha,\beta)$ 与 $\overline{C}_p(\sigma,\alpha,\beta)$ 类中函数关系得到(4.3.13)式.证毕.

从定理 3 即得偏差定理:

定理 4.3.5 若 $f(z)\in C_p(\sigma,\alpha,\beta)$，则有如下精确估计

$$H^{-\sigma}\left\{\frac{pr^{p-1}[1-(1-2\beta)r][1-(1-2\alpha)r]}{(1+r)^2}\right\}\le|f'(z)|\le H^{-\sigma}\left\{\frac{pr^{p-1}[1+(1-2\beta)r][1+(1-2\alpha)r]}{(1-r)^2}\right\}$$

$$H^{-\sigma}\int_0^r \frac{pr^{p-1}[1-(1-2\beta)r][1-(1-2\alpha)r]}{(1+r)^2}dr\le|f(z)|\le H^{-\sigma}\int_0^r \frac{pr^{p-1}[1+(1-2\beta)r][1+(1-2\alpha)r]}{(1-r)^2}dr$$

极值函数为

$$f(z)=H^{-\sigma}\int_0^z \frac{pz^{p-1}\left[1+(1-2\beta)xz\right]\left[1+(1-2\alpha)xz\right]}{(1-xz)^2}dz. \tag{4.3.17}$$

5. 积分平均不等式

引进 Bearnstein 星函数概念[46]：

定义 4.3.5 设 $\mu(z)$ 是定义在环域 $\{t: r_1<|z|<r_2\}$ 上的实值调和函数,对任意 $r\in(r_1,r_2)$, 设 $\mu(re^{i\theta})\in l^1(0,2\pi)$, 则定义

$$\mu^*(re^{i\theta})=\underset{|E|=2\theta}{Sup}\int_E \mu(re^{i\theta})d\theta, 0\le\theta\le\pi,$$

称为 Bearnstein 星函数,其中 $|E|$ 是 E 的 Lebesgue 测度.

定义 4.3.6 设 $g(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上可积函数, $g(x)$ 的分布函数为 $\lambda(t)=|\{x:g(x)>t\}|$, $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数 $G(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上满足条件: $G(x)=\min\{t:\lambda(t)\le 2x\}$, $G(0)=\sup\lambda(t)$ 是本性上界, $G(\pi)=\inf\lambda(t)$ 为本性下界. 则称 $G(x)$ 为 $g(x)$ 的一个对称递减重排函数.

引理 4.3.4[45] 对于 $g(x),h(x)\in l^1(-\pi,\pi)$, 下列三个条件等价:

(1) 对实轴上非减凸函数 φ 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left[g(x)\right]dx\le\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left[h(x)\right]dx;$$

(2) 对 $t\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(x)-t\right]^+dx\le\int_{-\pi}^{\pi}\left[h(x)-t\right]^+dx;$$

(3) $\forall\theta\in(0,\pi), g^*(\theta)\le h^*(\theta)$.

引理 4.3.5[45] 设 g,h 是 $[-\pi,\pi]$ 上的实值可积函数,则

$$(g+h)^*(\theta)\le g^*(\theta)+h^*(\theta),\theta\in[0,\pi]$$

等式成立的当且仅当 g,h 是自身的对称递减重排函数.

引理 4.3.6[47] 设 $\varphi(t)$ 是递增凸函数,若在 D 内 $g(z)$ 从属于 $f(z)$,则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta\le\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta, \tag{4.3.18}$$

若 $\mu(z)$ 在 D 上调和函数

$$v(z)=\mu(\omega(z)),\omega(z)\in B_0=\{\omega(z)\in A_1:|\omega(z)|<1,\omega(0)=0\},$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\pm v\left(re^{i\theta}\right)\right)d\theta\le\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\pm\mu\left(re^{i\theta}\right)\right)d\theta, \tag{4.3.19}$$

当 $r\ne0$ 时,且 $f(z)$ 不为常数函数时,(4.3.18)式成立的充要条件是 $\omega(z)=e^{i\theta}z$ 或 $\varphi(\mu)=a\ln\mu+b,a>0$; 当 $r\ne0$ 时,且 $\mu(z)$ 不为常数函数时,(4.3.20)式成立的充要条件是 $\omega(z)=e^{i\theta}z$ 或 $\varphi(\mu)=a\mu+b,a>0$.

定理 4.3.6 设 $\varphi(t)$ 是实轴上的递增凸函数,则对任意 $f(z)\in C_p(\sigma,\alpha,\beta)$,有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\pm\log\left|\frac{\left(H^{\sigma}f(z)\right)'}{pz^{p-1}}\right|\right)d\theta\le\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\pm\log\left|F_p'(\alpha,\beta;z)\right|\right)d\theta, \tag{4.3.20}$$

其中

$$|z|=r<1,F_p(\alpha,\beta;z)=\frac{[1+(1-2\beta)z][1+(1-2\alpha)z]}{(1-z)^2}.$$

等号成立的条件为

$$f(z)=H^{-\sigma}\left[pz^{p-1}\int_0^z F_p(\alpha,\beta;z)dz\right]. \tag{4.3.21}$$

证 若 $f(z)\in C_p(\sigma,\alpha,\beta)$,则 $z\left(H^{\sigma}f(z)\right)'=p(z)\cdot H^{\sigma}g(z)$, 这里 $p(z)\in P(\beta)$,

$g(z)\in V_p(\sigma,\alpha)$, 显然 $\dfrac{(H^{\sigma}f(z))'}{pz^{p-1}}=p(z)\cdot\dfrac{H^{\sigma}g(z)}{z^p}$ 且有

$$p(z)\prec\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z},\frac{H^{\sigma}g(z)}{z^p}\prec\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}.$$

由引理 4.3.4, 引理 4.3.5,和引理 4.3.6, 得

$$\left(\log\left|\frac{(H^{\sigma}f(z))'}{pz^{p-1}}\right|\right)^*=\left(\log|p(z)|+\log\left|\frac{H^{\sigma}g(z)}{z^p}\right|\right)^*$$

$$\leq(\log|p(z)|)^*+\left(\log\left|\frac{H^{\sigma}g(z)}{z^{p-1}}\right|\right)^*$$

$$\leq\left(\log\left|\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\right|\right)^*+\left(\log\left|\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right|\right)^*$$

$$=\left(\log\left|\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}\right|+\log\left|\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right|\right)^*$$

$$=\left(\log\left|\frac{[1+(1-2\beta)z][1+(1-2\alpha)z]}{(1-z)^2}\right|\right)^*.$$

再利用引理 4.3.6 得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\log\left|\frac{(H^{\sigma}f(z))'}{pz^{p-1}}\right|\right)d\theta\leq\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\log|F_p'(\alpha,\beta;z)|)d\theta,$$

同理,对负号情形也成立.因此(4.3.20)式成立. 证毕.

注 当 $\sigma=0$ 时,从定理 4.3.2,定理 4.3.3,定理 4.3.4 可推出 $C_p(0,\alpha,\beta)$ 的相应性质; $p=1$ 时, 从以上结果又能导出 $C_1(\sigma,\alpha,\beta)$ 的性质和类似于文[47]的性质,在此不讨论.

§4.4 关于缺系数的 p 叶 $\lambda-Bazilevic$ 函数类

本节中我们定义一类 $\lambda-Bazilevic$ 函数 $B_{n,p}(\lambda,\alpha,\mu,A,B,C,D,g(z))$ [49][50], 将讨论其子类 $B_{n,p}(\lambda,\alpha,\mu,1,-1,C,D,z)=B_{n,p}(\lambda,\alpha,\mu,C,D,z)$ 的性质, 得到函数类的包含关系、实部不等式、偏差定理和系数不等式.

1. 有关定义及引理

设$A_n(p)(n,p\in N)$表示在单位圆盘U内解析函数$f(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}a_k z^k$的全体构成的类.若$f(z)\in A_n(p)$满足条件

$$\frac{zf'(z)}{pf(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz},(-1\le B<A\le 1). \qquad (4.4.1)$$

则称$f(z)\in S_n^*(p,A,B)$.

引进如下函数类:

定义 4.4.1 若存在$g(z)\in S_n^*(p,C,D)$满足条件

$$(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{\alpha+i\mu}\prec\frac{1+Cz}{1+Dz}, \qquad (4.4.2)$$

其中$\alpha\ge 0,\mu\in R,-1\le D\le 1,C\ne D,z\in U$,则称$f(z)\in A_n(p)$为缺系数的$p$叶$\alpha+i\mu$型$\lambda-Bazilevic$函数，其全体记为$B_{n,p}(\lambda,\alpha,\mu,A,B,C,D,g(z))$. 其中幂取主值.

引理 4.4.1 设$\alpha\ge 0,\mu\in R,-1\le D\le 1,C\ne D,z\in U$,则函数$f(z)\in B_{n,p}(\lambda,\alpha,\mu,C,D,z)$当且仅当

$$q(z)+\frac{z}{\alpha+i\mu}q'(z)\prec\frac{1+Cz}{1+Dz}, \qquad (4.4.3)$$

其中 $q(z)=(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(f'(z)\right)^{\alpha+i\mu}$.

证 令

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha+i\mu}=m(z), \qquad (4.4.4)$$

在（4.4.4）式两边取对数导数可得

$$\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}=m(z)+\frac{z}{p(\alpha+i\mu)}m'(z), \qquad (4.4.5)$$

即

$$\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}=\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\frac{z}{p(\alpha+i\mu)}\left[\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}\right]', \quad (4.4.6)$$

同理可得

$$\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}=\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}+\frac{z}{p(\alpha+i\mu)}\left[\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]', \quad (4.4.7)$$

由（4.4.6）和（4.4.7）两式推出

$$(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}=$$

$$\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right)\right]+\frac{z}{p(\alpha+i\mu)}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right)\right]'$$

又因为 $f(z)\in B_{n.p}(\lambda,\alpha,\mu,C,D,z)$，并设

$$q(z)=(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu},$$

由上式即得（4. 4. 3）式. 上述证明过程是可逆的. 引理 4. 4. 1 证毕.

2. 从属关系

定理 4.4.1 设 $0\le\lambda\le1,\alpha\ge0,\mu\in R,\alpha+i\mu\ne0,-1\le D\le1,C\ne D$, 则函数 $f(z)\in$

$B_{n.p}(\lambda,\alpha,\mu,C,D,z)$，则

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\prec\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt\prec\frac{1+Cz}{1+Dz}. \quad (4.4.8)$$

证 令

$$q(z)=(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu},$$

则 $q(z)=1+q_nz^n+q_{n+1}z^{n+1}+\cdots$ 在 U 内解析.

由于$f(z)\in B_{n,p}(\lambda,\alpha,\mu,C,D,z)$，根据引理 4.4.1 可得

$$q(z)+\frac{z}{p(\alpha+i\mu)}q'(z)\prec\frac{1+Cz}{1+Dz},$$

令 $\frac{1+Cz}{1+Dz}=h(z)$, 易知 $h(z)$ 是 U 内的解析凸象函数， $h(0)=1$. 又因为 $\alpha\geq 0,\mu\in R,\alpha+i\mu\neq 0$，从而根据引理 3.7.1，可知

$$q(z)\prec\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}z^{-\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}}\int_0^z t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}h(t)\,dt\prec\frac{1+Cz}{1+Dz}.$$

亦即

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}&\prec\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}z^{-\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}}\int_0^z t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}h(t)\,dt\prec\frac{1+Cz}{1+Dz}\\&=\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt\prec\frac{1+Cz}{1+Dz}.\end{aligned}$$

证毕.

推论 4.4.1 设$0\leq\lambda\leq 1,\alpha\geq 0,\mu\in R,\alpha+i\mu\neq 0,\beta\neq 1$, 则

$$(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\prec\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z},z\in U,\quad(4.4.9)$$

当且仅当

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\prec\beta+\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+zt}{1-zt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt,z\in U.$$

推论 4.4.2 若$f(z)\in B_{n,p}(\lambda,\alpha,\mu,C,D,z)$，则

$$q(z)=(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\in B_{n,p}(0,\alpha,\mu,C,D,z).$$

3. 包含关系

定理 4.4.2 （1）若$0\leq\lambda_1\leq\lambda_2\leq 1,0\leq\beta_1\leq\beta_2<1$, 且

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]>0,$$

则 $B_{n.p}(\lambda_2,\alpha,\mu,1-2\beta_2,-1,z)\subset B_{n.p}(\lambda_1,\alpha,\mu,1-2\beta_1,-1,z)$;

（2）（1）若 $0\le\lambda_2\le\lambda_1\le 1, 0\le\beta_1\le\beta_2<1$, 且

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]<0,$$

则 $B_{n.p}(\lambda_2,\alpha,\mu,1-2\beta_2,-1,z)\subset B_{n.p}(\lambda_1,\alpha,\mu,1-2\beta_1,-1,z)$.

证 （1）当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时结果显然成立. 当 $0\le\lambda_1\le\lambda_2\le 1, 0\le\beta_1\le\beta_2<1$ 时，设 $f(z)\in B_{n.p}(\lambda_2,\alpha,\mu,1-2\beta_2,-1,z)$，那么

$$\operatorname{Re}\left[(1-\lambda_2)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda_2\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]>\beta_2, z\in U. \quad (4.4.10)$$

如果 $0\le\lambda_1\le\lambda_2<\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]>0$ 时，有

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left[(1-\lambda_1)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda_1\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]\\&=\operatorname{Re}\left[(1-\lambda_2)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda_2\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]+\\&(\lambda_2-\lambda_1)\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]>\\&\operatorname{Re}\left[(1-\lambda_2)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda_2\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]>\beta_2>\beta_1, z\in U.\end{aligned}$$

由此推出 $B_{n.p}(\lambda_2,\alpha,\mu,1-2\beta_2,-1,z)\subset B_{n.p}(\lambda_1,\alpha,\mu,1-2\beta_1,-1,z)$;

（2）设 $0\le\lambda_2\le\lambda_1, 0\le\beta_1\le\beta_2<1$, $f(z)\in B_{n.p}(\lambda_2,\alpha,\mu,1-2\beta_2,-1,z)$，那么根据已知

条件可知

$$\mathrm{Re}\left[(1-\lambda_2)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda_2\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]>\beta_2, z\in U.$$

如果 $\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]<0$时，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left[(1-\lambda_1)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda_1\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]\\&=\mathrm{Re}\left[(1-\lambda_2)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda_2\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]+\\&(\lambda_2-\lambda_1)\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]>\\&\mathrm{Re}\left[(1-\lambda_2)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda_2\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]>\beta_2>\beta_1, z\in U.\end{aligned}$$

由此推出 $B_{n.p}(\lambda_2,\alpha,\mu,1-2\beta_2,-1,z)\subset B_{n.p}(\lambda_1,\alpha,\mu,1-2\beta_1,-1,z)$. 证毕.

推论 4.4.3 当 $0\le\lambda_1\le\lambda_2<1$, 且

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]>0,$$

则 $B_{n.p}(\lambda,\alpha,\mu,1-2\beta,-1,z)$为 p 叶 *Bazilevic* 函数的子类.

4. 实部不等式

定理 4.4.3 设$0\le\lambda\le1,\alpha\ge0,\mu\in R,\alpha+i\mu\ne0,-1\le D\le1,C\ne D,$若 $f(z)\in B_{n.p}(\lambda,\alpha,\mu,C,D,z)$，则

$$\inf_{z\in U}\operatorname{Re}\left[\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt\right]<\operatorname{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]$$

$$<\sup_{z\in U}\operatorname{Re}\left[\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt\right].$$

证 因为 $f(z)\in B_{n.p}(\lambda,\alpha,\mu,C,D,z)$，由定理 4.4.1 可知

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\prec\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt,$$

利用上式和从属的定义可得

$$\inf_{z\in U}\operatorname{Re}\left[\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt\right]<\operatorname{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]<$$

$$\sup_{z\in U}\operatorname{Re}\left[\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt\right].$$

证毕.

推论 4.4.4 设 $0\le\lambda\le1,\alpha\ge0,\mu\in R,\alpha+i\mu\ne0,\beta<1$, 若

$$f(z)\in B_{n.p}(\lambda,\alpha,\mu,1-2\beta,-1,z),$$

则

$$\beta+(1-\beta)\inf_{z\in U}\operatorname{Re}\left[\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+zt}{1-zt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt\right]<$$

$$\operatorname{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]<$$

$$\beta+(1-\beta)\sup_{z\in U}\operatorname{Re}\left[\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+zt}{1-zt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt\right].$$

推论 4.4.5 设 $0\le\lambda\le1,\alpha\ge0,\mu\in R,\alpha+i\mu\ne0,\beta>1$, 且

$$\operatorname{Re}\left[(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]<\beta,z\in U.$$

则

$$\beta+(1-\beta)\sup_{z\in U}\mathrm{Re}\left[\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+zt}{1-zt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt\right]<$$

$$\mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha+i\mu}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha+i\mu}\right]<$$

$$\beta+(1-\beta)\inf_{z\in U}\mathrm{Re}\left[\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}\int_0^1\frac{1+zt}{1-zt}t^{\frac{p(\alpha+i\mu)}{n}-1}dt\right].$$

定理 4.4.4 设$0\le\lambda\le 1,\alpha\ge 0,-1\le D<C\le 1$, $f(z)\in B_{n,p}(\lambda,\alpha,0,C,D,z)$，则

$$\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1-Ct}{1-Dt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt<\mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}\right]<\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Ct}{1+Dt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt. \quad (4.4.11)$$

其极值函数满足

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}=\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Ctz^n}{1+Dtz^n}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt. \quad (4.4.12)$$

证 因为$f(z)\in B_{n,p}(\lambda,\alpha,0,C,D,z)$，由定理 4.4.1 可知

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}\prec\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt$$

所以利用从属原理和$D<C$可得

$$\mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}\right]<\sup_{z\in U}\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt\right]$$

$$\le\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\sup_{z\in U}\mathrm{Re}\left(\frac{1+Czt}{1+Dzt}\right)t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt<\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Ct}{1+Dt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt, \quad (4.4.13)$$

同理可得

$$\mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}\right]>\inf_{z\in U}\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt\right]$$

$$\geq \frac{\alpha p}{n}\int_0^1 \inf_{z\in U}\mathrm{Re}\left(\frac{1+Czt}{1+Dzt}\right)t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt > \frac{\alpha p}{n}\int_0^1 \frac{1-Ct}{1-Dt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt. \qquad (4.4.14)$$

由不等式（4.4.13）和（4.4.14）即可推出不等式（4.4.11），容易验证其极值函数满足（4.4.12）式. 证毕.

类似于定理 4.4.4 的证明，容易得到

定理 4.4.5 设 $0\leq\lambda\leq 1,\alpha\geq 0,-1\leq C<D\leq 1$, $f(z)\in B_{n,p}(\lambda,\alpha,0,C,D,z)$，则

$$\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 \frac{1+Ct}{1+Dt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt < \mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}\right]$$

$$<\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 \frac{1-Ct}{1-Dt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt. \qquad (4.4.15)$$

其极值函数满足（4.4.12）式.

推论 4.4.6 设 $\alpha\geq 0,\beta<1$, $f(z)\in B_{n,p}(1,\alpha,0,1-2\beta,-1,z)$，则有

$$\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 \frac{1-(1-2\beta)t}{1+t}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt < \mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha} <$$

$$\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 \frac{1+(1-2\beta)t}{1-t}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt. \qquad (4.4.16)$$

其极值函数为

$$f_{\alpha,\beta}(z)=\int_0^z\left[\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 \frac{1+(1-2\beta)t^n u}{1-t^n u}u^{\frac{\alpha p}{n}-1}du\right]dt.$$

推论 4.4.7 设 $0\leq\lambda\leq 1,\alpha\geq 0,\beta>1$, $f(z)$ 满足条件

$$\mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}\right]<\beta, z\in U.$$

则

$$\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 \frac{1+(1-2\beta)t}{1-t}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt < \mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}\right]$$

$$<\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 \frac{1-(1-2\beta)t}{1+t}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt. \qquad (4.4.17)$$

推论 4.4.8 设 $0\le\lambda\le1,\alpha\ge0,\beta>1$, $f(z)$满足条件

$$\mathrm{Re}\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}<\beta, z\in U.$$

则

$$\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+(1-2\beta)t}{1-t}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt<\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}<\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1-(1-2\beta)t}{1+t}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt. \quad (4.4.18)$$

定理 4.4.6 (1) 设$0\le\lambda\le1,\alpha\ge0,-1\le$D<C$\le1$，若$f(z)\in B_{n.p}(\lambda,\alpha,0,C,D,z)$，

则

$$\left[\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1-Ct}{1-Dt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt\right]^{\frac{1}{2}}<\mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$<\left[\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Ct}{1+Dt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt\right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4.19)$$

(2) 设$0\le\lambda\le1,\alpha\ge0,-1\le$D$\le1$,C$\ne$D,，$f(z)\in B_{n.p}(\lambda,\alpha,0,C,D,z)$，则

$$\left[\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Ct}{1+Dt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt\right]^{\frac{1}{2}}<\mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$<\left[\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1-Ct}{1-Dt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt\right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4.20)$$

（4.4.19）和（4.4.20）的极值函数均满足（4.4.12）式. 证毕.

证 利用定理 4.4.1 和熟知的结果：若$\mathrm{Re}\,\sigma>0$, 则$(\mathrm{Re}\,\rho)^{\frac{1}{2}}\le\mathrm{Re}\,\rho^{\frac{1}{2}}\le|\rho|^{\frac{1}{2}}$. 并注意到

$$0<\frac{1-C}{1-D}<\mathrm{Re}\left[(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)\right]<\frac{1+C}{1+D}, -1\le\mathrm{D}<\mathrm{C}\le1$$

由定理 4.4.3 得到(4.4.19).类似的方法可以证明(4.4.20). 证毕.

5. 偏差定理 系数不等式

定理4.4.7 设$0\le\lambda\le 1,\alpha\ge 0,-1\le D<C<1$. $f(z)\in B_{n.p}(\lambda,\alpha,0,C,D,z)$,

(1) 若$\lambda=0,|z|=r<1$, 则

$$r^p\left(\frac{1-Cr^n}{1-Dr^n}\right)^{\frac{1}{2}}\le|f(z)|\le r^p\left(\frac{1+Cr^n}{1+Dr^n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{4.4.21}$$

(2) 若$\lambda>0,|z|=r<1$, 则

$$\frac{\alpha P}{n}\int_0^1 t^{\frac{\alpha p}{n}-1}\frac{1-Ctr^n}{1-Dtr^n}dt\le\left|(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}\right|$$

$$<\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 t^{\frac{\alpha p}{n}-1}+\frac{1+Ctr^n}{1+Dtr^n}du \tag{4.4.22}$$

且不等式是准确的,极值函数由(4.4.12)式确定.

证 (1)设$\lambda=0,f(z)\in B_{n,p}(\lambda,\alpha,0,C,D,z),-1\le B<A\le 1$, 由定义可知

$$\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}\prec\frac{1+Cz}{1+Dz}$$

再根据从属定义,存在解析函数$w(z)$在U内满足条件$|w(z)|\le|z|$, 且

$$\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}=\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Cw(z)t}{1+Dw(z)t}\cdot t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt.$$

且$\omega(z)=c_nz^n+c_{n+1}z^{n+1}+\cdots$在$U$内解析且$|w(z)|\le|z|^n$, $|z|=r<1$.

因此

$$\left|\frac{f(z)}{z^p}\right|^{\alpha}\le\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\left|\frac{1+Ctw(z)}{1+Dtw(z)}\right|t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt\le\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Ct|w(z)|}{1+Dt|w(z)|}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt$$

$$\le\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Ctr^n}{1+Dtr^n}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt,$$

由此推出

$$r^p\left(\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 u^{\frac{\alpha p}{n}-1}\frac{1-Ctr^n}{1-Dtr^n}dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}\le|f(z)|\le r^p\left(\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 u^{\frac{\alpha p}{n}-1}\frac{1+Ctr^n}{1+Dtr^n}dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(3) 设$\lambda>0, f(z)\in B_{n,p}(\lambda,\alpha,0,C,D), -1\le D<C\le 1$,有定理 4.4.1 可知

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^\alpha+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^\alpha\prec\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Czt}{1+Dzt}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt$$

根据从属关系有

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^\alpha+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^\alpha=\frac{\alpha p}{n}\int_0^1\frac{1+Ctw(z)}{1+Dtw(z)}t^{\frac{\alpha p}{n}-1}dt$$

以上与(1)相同的方法得出

$$\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 t^{\frac{\alpha p}{n}-1}\frac{1-Ctr^n}{1-Dtr^n}dt\le\left|(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^\alpha+\lambda\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^\alpha\right|\le\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 t^{\frac{\alpha p}{n}-1}\frac{1+Ctr^n}{1+Dtr^n}dt$$

极值函数由(4.4.12)式确定. 证毕.

与定理 4.4.7 相同的方法可以证明

定理 4.4.8 设$f(z)\in B_{n,p}(\lambda,\alpha,0,C,D), -1\le C<D\le 1$

(1) 若$\lambda=0, |z|=r<1$,则

$$r^p\left(\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 t^{\frac{\alpha p}{n}-1}\frac{1+Ctr^n}{1+Dtr^n}dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}\le|f(z)|\le r^p\left(\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 t^{\frac{\alpha p}{n}-1}\frac{1-Ctr^n}{1-Dtr^n}dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(2) 若$\lambda>0, |z|=r<1$,则

$$r^{\alpha p}p\left(\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 t^{\frac{\alpha p}{n}-1}\frac{1+Ctr^n}{1+Dtr^n}dt\right)\le\left|(1-\lambda)f^\alpha(z)+\lambda\left(\frac{zf'(z)}{p}\right)^\alpha\right|$$

$$\le r^{\alpha p}\left(\frac{\alpha p}{n}\int_0^1 t^{\frac{\alpha p}{n}-1}\frac{1-Ctr^n}{1-Dtr^n}dt\right).$$

极值函数由(4.4.12)式确定.

定理 4.4.9 设$f(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}a_kz^k\in B_{n,p}(\lambda,\alpha,0,C,D)$,则

$$\left|a_{n+p}\right| \le \frac{p\left|C-D\right|}{(n\lambda+p)(n+\alpha)}. \tag{4.4.22}$$

极值函数由(4.4.12)式确定且 $f(z)=z^p+\dfrac{p\left|C-D\right|}{(n\lambda+p)(n+\alpha)}z^{n+p}+\cdots$.

证 设 $f(z)=z^p+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}a_k z^k \in B_{n,p}(\lambda,\alpha,0,C,D)$, 则有

$$(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\lambda\frac{(zf'(z))'}{(pf(z))'}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right)^{\alpha}=$$

$$1+\frac{(n\lambda+p)(n+\alpha)}{p}a_{n+p}z^n+\cdots \prec \frac{1+Cz}{1+Dz}$$

根据引理 4.4.2 可得

$$\left|\frac{(n\lambda+p)(n+\alpha)}{p}a_{n+p}\right| \le \left|C-D\right|$$

从而推出(4.4.22)成立,且其极值函数为

$$f(z)=z^p+\frac{p\left|C-D\right|}{(n\lambda+p)(n+\alpha)}z^{n+p}+\cdots B_{n,p}(\lambda,\alpha,0,C,D).$$

证毕.

§4.5 关于某类 p 叶解析函数

本节中我们引进新的 p 叶解析函数子类 $B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$, 应用微分从属方法证明它的从属关系、包含关系、偏差定理和不等式性质[51].

1、 有关定义及引理

在本节中引进 p 叶解析函数类 $B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$:

定义 4.5.1 设 $-1 \le B < A \le 1$, 若函数 $f(z) \in A_p$, 满足条件

$$\frac{f(z)}{z^p} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}, \tag{4.5.1}$$

则称 $f(z) \in V_p(A,B)$.

定义 4.5.2 设 $\alpha > 0, -1 \le D < C \le 1, g(z) \in V_p(A,B)$, 则称 $f(z) \in B_p(A,B,C,D)$

当且仅当函数 $f(z) \in H_p$ 满足

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha} \prec \frac{1+Cz}{1+Dz}, \tag{4.5.2}$$

定义 4.5.3 设 $\alpha > 0, \lambda \ge 0, -1 \le D < C \le 1$, 则 $f(z) \in B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$ 当且仅当

$\exists g(z) \in V_p(A,B)$, 使得

$$\left(1 - \lambda \frac{zg'(z)}{pg(z)}\right)\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha} + \lambda \frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha} \prec \frac{1+Cz}{1+Dz}, \tag{4.5.3}$$

其中幂函数取主值,以下相同.

特别，令 $B = D = -1, A = 1-2\sigma, C = 1-2\beta, 0 \le \sigma < 1, 0 \le \beta < 1$

显然 $f(z) \in B_{p,\lambda,\alpha}(1-2\sigma,-1,1-2\beta,-1) = B_{p,\lambda,\alpha}(\sigma,\beta)$ 当且仅当 $\exists g(z) \in V_p(A,B)$, 使得

$$\operatorname{Re}\left\{\left(1 - \lambda \frac{zg'(z)}{pg(z)}\right)\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha} + \lambda \frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha}\right\} > \beta, z \in U. \tag{4.5.4}$$

在定义 4.5.3 中 当 $p = 1, A = 1, B = -1, g(z) \in S_1^*$ 时,记 $B_{1,\lambda,\alpha}(1,-1,C,D)$

$= B_{\lambda,\alpha}(C,D,g(z))$.

我们需要如下引理

引理 4.5.1 设 $g(z) \in V_p(A,B), -1 \le B < A \le 1$, 则当 $|z| = r < 1$ 时，有

$$r^p \cdot \frac{1-Ar}{1-Br} \le |g(z)| \le r^p \cdot \frac{1+Ar}{1+Br}, \tag{4.5.5}$$

不等式是准确的,极值函数为

$$g(A,B;z) = z^p \frac{1+Az}{1+Bz}. \tag{4.5.6}$$

证 因 $g(z) \in V_p(A,B)$, 由定义 4.5.1 可知

$$\frac{g(z)}{z^p} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$$

根据从属的定义得,存在 U 内解析函数 $\omega(z)$,满足 $\omega(0)=0,|\omega(z)|\le|z|$,使得

$$\frac{g(z)}{z^p}=\frac{1+A\omega(z)}{1+B\omega(z)}$$

应用 Schwarz 引理 1.1.2 可得 $\omega(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots$ 和 $|\omega(z)|\le|z|$,所以对 $|z|=r<1$,有

$$\left|\frac{g(z)}{z^p}\right|=\left|\frac{1+A\omega(z)}{1+B\omega(z)}\right|\le\frac{1+A|\omega(z)|}{1+B|\omega(z)|}\le\frac{1+Ar}{1+Br},$$

和

$$\left|\frac{g(z)}{z^p}\right|\ge\operatorname{Re}\left(\frac{g(z)}{z^p}\right)\ge\frac{1-Ar}{1-Br}.$$

从以上两式即得(4.5.5)式.证毕.

2. 主要结果及其证明

定理 4.5.1 设函数 $g(z)\in V_p(A,B)$,则 $g(z)$ 在 $|z|<r_1$ 内是 p 叶星象的,这里 r_1 为方程

$$p-2\left(1-\frac{1-A}{1-B}+\frac{1-A}{1-B}p\right)r-\left(1-2\frac{1-A}{1-B}\right)pr^2=0 \tag{4.5.7}$$

的最小正根.

证 设 $g(z)\in V_p(A,B)$, 令 $p(z)=\dfrac{g(z)}{z^p}$, 则 $p(z)$ 在 U 内解析且 $R_e\,p(z)>\dfrac{1-A}{1-B}$, 由引理 3.5.1, 得

$$\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{pg(z)}=1+\operatorname{Re}\frac{zp'(z)}{p\cdot p(z)}\ge1-\left|\frac{zp'(z)}{p\cdot p(z)}\right|\ge$$

$$\frac{p-2\left(1-\frac{1-A}{1-B}+\frac{1-A}{1-B}P\right)r-\left(1-2\frac{1-A}{1-B}\right)pr^2}{(1-r)p\left[1+\left(1-2\frac{1-A}{1-B}\right)r\right]}$$

令 $\Phi(r)=p-2\left(1-\frac{1-A}{1-B}+\frac{1-A}{1-B}p\right)r-\left(1-2\frac{1-A}{1-B}\right)pr^2$, 则 $\Phi(r)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $\Phi(0)=p>0,\Phi(1)=-2\left(1-\frac{1-A}{1-B}\right)<0$, 从而方程(4.5.7)在(0,1)内有最小正根 r_1.因此

$|z|<r_1$ 时，$R_e \dfrac{zg'(z)}{p\cdot g(z)}>0$. 即 $g(z)$ 在 $|z|<r_1$ 内是 p 叶星象的. 证毕.

定理 4.5.1 容易得到

推论 4.5.1 设 $f(z)\in B_{1,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$, 则 $f(z)$ 在 $|z|<r_1$ 内 $f(z)\in B_{\lambda,\alpha}(C,D,g(z))$ 其中 r_1 为方程(4.5.7)中 $p=1$ 时的最小正根.

注 在 D 内为 $B_{\lambda,\alpha}(C,D,g(z))\subset B_{1,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$.

定理 4.5.2 设 $\lambda>0, f(z)\in B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$, 则

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha}\prec\frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1\frac{1+Czu}{1+Dzu}u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}du. \tag{4.5.8}$$

证 令 $F(z)=\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha}$, 则 $F(z)=1+c_1z+c_2z^2+\cdots$ 在 D 内解析，且取对数导数可得

$$\left(1-\lambda\frac{zg'(z)}{pg(z)}\right)\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha}+\lambda\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha}=F(z)+\frac{\lambda}{\alpha p}zF'(z),$$

由于 $f(z)\in B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$, 所以

$$F(z)+\frac{\lambda}{\alpha p}zF'(z)\prec\frac{1+Cz}{1+Dz}, \tag{4.5.9}$$

显然 $h(z)=\dfrac{1+Cz}{1+Dz}$ 是 U 内凸象函数，$h(0)=1$. 因为 $\lambda>0, c=\dfrac{\alpha p}{\lambda}>0$, 所以根据引理 3.7.1 可得

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha}=F(z)\prec\frac{\alpha p}{\lambda}z^{-\frac{\alpha p}{\lambda}}\int_0^z\frac{1+At}{1+Bt}t^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}dt=\frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1\frac{1+Azu}{1+Bzu}u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}du.\prec h(z).$$

证毕.

推论 4.5.2 $\lambda>0, B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)\subset B_{p,0,\alpha}(A,B,C,D).\subset B_p(A,B,C,D)$.

定理 4.5.3 设 $\lambda>0,-1\le B<A\le 1,-1\le D<C\le 1, f(z)\in B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$, 则

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha}>\frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1\frac{1-Cu}{1-Du}u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}du, z\in D. \tag{4.5.10}$$

且这个不等式精确的，极值函数为

$$f_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D;z)=g(A,B;z)\left[\frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1\frac{1+Cuz}{1+Duz}u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}du\right]^{\frac{1}{\alpha}},\tag{4.5.11}$$

其中函数 $g(A,B;z)$ 由(4.5.6)式给出.

证 因为 $f(z)\in B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$, 根据定理 4.5.2 可得

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha}\prec\frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1\frac{1+Czu}{1+Dzu}u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}du.\tag{4.5.12}$$

所以根据从属的定义和 $C>D$ 得

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha}\ge\min_{z\in D}\operatorname{Re}\left[\frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1\frac{1+Czu}{1+Dzu}u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}du\right]=\frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1\min_{z\in D}\operatorname{Re}\left(\frac{1+Czu}{1+Dzu}\right)u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}du$$

$$>\frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1\frac{1-Cu}{1-Du}u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}du,z\in D.$$

注意到 $f_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D;z)\in B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$ 便得不等式（4.5.10）是准确的. 证毕.

定理 4.5.4 设 $\lambda>0,-1\le B<A\le1,-1\le D<C\le1,f(z)\in B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$.

(1) 若 $\lambda=0,$ 则当 $|z|=r<1$ 时有

$$r^{p}\left(\frac{1-Ar}{1-Br}\right)\left(\frac{1-Cr}{1-Dr}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\le|f(z)|\le r^{p}\left(\frac{1+Ar}{1+Br}\right)\left(\frac{1+Cr}{1+Dr}\right)^{\frac{1}{\alpha}};\tag{4.5.13}$$

(2) 若 $\lambda>0,$ 则当 $|z|=r<1$ 时有

$$r^{p}\left(\frac{1-Ar}{1-Br}\right)\left(\frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}\frac{1-Cur}{1-Dur}du\right)^{\frac{1}{\alpha}}\le|f(z)|$$

$$\le r^{p}\left(\frac{1+Ar}{1+Br}\right)\left(\frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}\frac{1+Cur}{1+Dur}du\right)^{\frac{1}{\alpha}};\tag{4.5.14}$$

证 (1) 若 $\lambda=0,$ 因为

$f(z)\in B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D),\ \lambda>0,-1\le B<A\le1,-1\le D<C\le1,$ 由(4.5.3)式得到

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha} \prec \frac{1+Cz}{1+Dz},$$

根据从属的定义得,存在D内解析函数$\omega(z)$,满足$\omega(0)=0,|\omega(z)|\le|z|$,使得

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha} = \frac{1+C\omega(z)}{1+D\omega(z)}$$

应用 Schwarz 引理可得$\omega(z)=d_1z+d_2z^2+\cdots$和$|\omega(z)|\le|z|$,所以对$|z|=r<1$,有

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|^{\alpha} = \left|\frac{1+C\omega(z)}{1+D\omega(z)}\right| \le \frac{1+C|\omega(z)|}{1+D|\omega(z)|} \le \frac{1+Cr}{1+Dr},$$

和

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|^{\alpha} \ge \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha} \ge \frac{1-Cr}{1-Dr}.$$

根据引理 4.5.1,从以上两式即得(4.5.13)式成立. 证毕.

(2) 若 $\lambda>0$,根据定理 4.5.2 得

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha} \prec \frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1 \frac{1+Czu}{1+Dzu} u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1} du.$$

由从属的定义可得

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]^{\alpha} = \frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1 \frac{1+Cu\omega(z)}{1+Du\omega(z)} u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1} du,$$

其 中 $\omega(z)=d_1z+d_2z^2+\cdots$ 在 D 内 解 析 且 $|\omega(z)|\le|z|$, 所 以 对 $|z|=r<1$, 有

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|^{\alpha} = \frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1 \left|\frac{1+Cu\omega(z)}{1+Du\omega(z)}\right| u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1} du \le \frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1 \frac{1+Cu|\omega(z)|}{1+Du|\omega(z)|} u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1} du \le \frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1 \frac{1+Aur}{1+Bur} u^{\frac{\alpha p}{\lambda}} du,$$ 和

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|^{\alpha} \ge \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha} \ge \frac{\alpha p}{\lambda}\int_0^1 \frac{1-Cur}{1-Dur} u^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1} du..$$

利用引理 4.5.1，从以上两式即得(4.5.14)式成立.极值函数由（4.5.11）式确定. 证毕.

注：当$B=D=-1,A=1-2\sigma,C=1-2\beta,0\le\sigma<1,0\le\beta$时，从以上结果即得

$B_{p,\lambda,\alpha}(\sigma,\beta)$的相应性质.

§ 4.6 用 Salagean 算子定义的单叶调和函数类

单叶调和函数在极小曲面理论中有重要的应用，其研究一般采用共形映射和解析单叶函数理论、拟共形映射、微分几何的理论与方法. 1984 年英国数学家 Clunie 和 Sheil-Small[51] 将解析单叶函数的经典理论和思想应用于调和单叶映射,他们的一系列研究引起人们对单叶调和映射的浓厚兴趣. 近二十年来，美国、英国、加拿大等国的数学家，如 P.Duren、G.Schober、W.Hengartner、Abu-Muhanna 等人有一批工作相继出现，取得一些重要研究成果. 目前该方向的研究正在展开. 从本节开始主要介绍我们已研究的几类单叶调和函数的性质[52]-[58].

1. 有关的定义

设 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 为区域 $E\subset C$（有限复平面）内的复调和函数，其中 $u(z)$ 和 $v(z)$ 是 E 内的实调和函数. 如果 E 是单连通区域，那么 $f(z)$ 具有形式 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，其中 $h(z)$ 和 $g(z)$ 均为 E 内的解析函数. 称 $h(z)$ 为解析部分，$g(z)$ 为 $f(z)$ 的共轭解析部分.

S_H 表示在 D 内调和单叶、保向，并满足条件 $f(0)=f_z'(0)-1=0$ 的函数类.

设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in S_H$ ，其中 $h(z)$ 和 $g(z)$ 具有展开式

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n,\ g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n. \tag{4.6.1}$$

记 $S_H^0=\{f(z):f(z)\in S_H,b_1=0\}$. 显然 $S\subset S_H^0\subset S_H$. 当 $g(z)=0$ 时 S_H 变为 S . $f(z)$ 在 D 内单叶、保向的一个充要条件是 $|h'(z)|>|g'(z)|,z\in D$.

定义 4.6.1 若函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in S_H$， $f_{\bar z}(0)=b_1$, 且满足条件

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg f\left(re^{i\theta}\right)\right)=\mathrm{Re}\left\{\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\right\}>\alpha,0\le\alpha<1,z\in D.$$

则称 $f(z)$ 为调和星象函数，其全体记为 $S_H^*(\alpha)$[53].

定义 4.6.2 若函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in S_H$， $f_{\bar{z}}(0)=b_1$,且满足条件

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\frac{\partial}{\partial\theta}f\left(re^{i\theta}\right)\right)>\alpha, 0\le\alpha<1, z\in D.$$

则称 $f(z)$ 为调和凸象函数，其全体记为 $K_H(\alpha)$.

在[54]-[58]中研究了 S_H 中的某些子类的性质.我们在 S_H 上定义更为广泛的 Salagean 算子 D_λ^n：

$$D_\lambda^n f(z)=D_\lambda^n h(z)+\overline{D_\lambda^n g(z)}, \lambda\ge 0, n\in N\cup\{0\}. \tag{4.6.2}$$

其中

$$D_\lambda^n h(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n a_k z^k，D_\lambda^n g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n b_k z^k.$$

定义 4.6.3 设 $0\le\alpha, 0\le\beta<1$,若函数 $f(z)\in S_H$ 满足条件

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)}{z}+\alpha\left[D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)\right]'\right\}>\beta. \tag{4.6.3}$$

其中的 $D_\lambda^n h$ 和 $D_\lambda^n g$ 适合（4.6.2）式，则称 $f(z)\in SHP_\lambda(\alpha,\beta)$[59].

若函数 $f=h+\overline{g}\in SHP_\lambda(\alpha,\beta)$ ， $h(z)$ 和 $g(z)$ 满足条件

$$h(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|z^k ，g(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|z^k， \tag{4.6.4}$$

则称 $f(z)\in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta)$. 显然当 $0\le\beta_1\le\beta_2<1$ 时有 $SHP_\lambda(\alpha,\beta_2)\subset SHP_\lambda(\alpha,\beta_1)$.

2. 系数不等式

首先证明类中函数的系数不等式.

定理 4.6. 1. 设 $\lambda\ge 0$ $0\le\alpha, 0\le\beta<1, \lambda+\alpha\ge 1$,若函数 $f=h+\overline{g}$,具有形式（4.6.2），且满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^{n}(1-\alpha+k\alpha)(|a_k|+|b_k|)\le 2-\beta, \tag{4.6.5}$$

其中 $a_1=1$ ，则 $f(z)$ 是 D 内单叶调和的，且 $f(z)\in SHP_{\lambda}(\alpha,\beta)$.

证 下面分几步证明.（1） $f(z)$ 在 D 内单叶.

设 $z_1,z_2\in D$, $|z_1|\le|z_2|<1$ ，我们利用(4.6.5)式，得到

$$\begin{aligned}
|f(z_1)-f(z_2)| &\ge |h(z_1)-h(z_2)|-|g(z_1)-g(z_2)| \\
&\ge |z_1-z_2|\left(1-\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k||z_2|^{k-1}-\sum_{n=1}^{\infty}k|b_k||z_2|^{k-1}\right) \\
&= |z_1-z_2|\left(1-\left(\sum_{k=2}^{\infty}k(|a_k|+|b_k|)|z_2|^{k-1}+|b_1|\right)\right) \\
&\ge |z_1-z_2|\left[1-\left(\sum_{k=2}^{\infty}k(|a_k|+|b_k|)+|b_1|\right)\right], \\
&\ge |z_1-z_2|\left[1-\left(\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^{n}(1-\alpha+k\alpha)(|a_k|+|b_k|)+|b_1|\right)\right] \\
&> |z_1-z_2|\left[1-(1-\beta-|b_1|+|b_1|)\right]=\beta|z_1-z_2|\ge 0.
\end{aligned}$$

因此 $f(z)$ 在 D 内是单叶.

（2） $f(z)$ 是局部单叶调和保向.

$$\begin{aligned}
|h'(z)| &\ge 1-\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k||z|^{k-1}>1-\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k|>1-\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^{n}(1-\alpha+k\alpha)|a_k| \\
&\ge \beta+\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^{n}(1-\alpha+k\alpha)|b_k|\ge\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^{n}(1-\alpha+k\alpha)|b_k| \\
&> \sum_{k=1}^{\infty}k|b_k||z|^{k-1}\ge|g'(z)|.
\end{aligned}$$

（3）要证明 $f\in SHP_{\lambda}(\alpha,\beta)$. 因为 $\operatorname{Re}w\ge\beta$ 当且仅当 $|1-\beta+w|\ge|1+\beta-w|$, 所以只须证明

$$\left|1-\beta+(1-\alpha)\frac{D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)}{z}+\alpha\left[D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)\right]\right|-$$

$$\left|1+\beta-(1-\alpha)\frac{D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)}{z}-\alpha\left[D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)\right]\right|\geq 0, \quad (4.6.6)$$

而

$$\left|1-\beta+(1-\alpha)\frac{D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)}{z}+\alpha\left[D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)\right]\right|-$$

$$\left|1+\beta-(1-\alpha)\frac{D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)}{z}-\alpha\left[D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)\right]\right|$$

$$=\left|2-\beta+\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)a_k z^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)b_k z^{k-1}\right|-$$

$$\left|\beta-\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)a_k z^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)b_k z^{k-1}\right|\geq$$

$$2\left[(1-\beta)-\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)|a_k||z|^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)|b_k||z|^{k-1}\right]$$

$$>2\left[(1-\beta)-\left(\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)|a_k|+\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)|b_k|\right)\right]\geq 0.$$

因此 $f\in SHP_\lambda(\alpha,\beta)$.

调和函数

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}x_k z^k+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}\overline{y_k z^k}, \quad (4.6.7)$$

其中

$$\sum_{k=2}^{\infty}|x_k|+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|=1$$

满足(4.6.6)，所以(4.6.7) 确定的函数属于$SHP_\lambda(\alpha,\beta)$，事实上

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)(|a_n|+|b_n|)=1+(1-\beta)\left(\sum_{n=2}^{\infty}|x_n|+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|\right)=2-\beta.$$ 证毕.

定理 4.6.2. 设$0\le\lambda, 0\le\alpha, 0\le\beta<1, \lambda+\alpha\ge1$, $a_1=1$，若函数$f=h+\overline{g}$ 具有(4.6.4)式的形式. 则$f\in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta)$ 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)(|a_k|+|b_k|)\le 2-\beta, \tag{4.6.8}$$

证 根据定理 4.6.1 充分性显然成立.下面要证明定理的必要性.

设 $f\in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta)$ 由定义和（4.6.4）可知$f\in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta)$当且仅当

$$\mathrm{Re}\{(1-\alpha)[D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)]/z+\alpha[D_\lambda^n h(z)+D_\lambda^n g(z)]'\}>\beta$$

上式等价于

$$\mathrm{Re}\left\{1-\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)|a_k||z|^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)|b_k||z|^{k-1}\right\}>\beta$$

并选择实值的 z 使得当$z\to1^-$时，我们有

$$1-\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)|a_k|-\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)|b_k|\ge\beta,$$

从上式即得 (4.6.8)式. 证毕.

3. 偏差定理

定理 4.6.3. 设

$0\le\alpha, 0\le\beta<1, \lambda+\alpha\ge1, |b_1|\le1-\beta, f\in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta), |z|=r<1$,则

$$|f(z)|\le(1+|b_1|)r+\frac{1}{(1+\lambda)(1+\alpha)}(1-|b_1|-\beta)r^2, \tag{4.6.9}$$

$$|f(z)| \ge (1+|b_1|)r - \frac{1}{(1+\lambda)(1+\alpha)}(1-|b_1|-\beta)r^2, \qquad (4.6.10)$$

极值函数分别为

$$f(z) = z - |b_1|\bar{z} - \frac{1}{(1+\lambda)(1+\alpha)}(1-|b_1|-\beta)\bar{z}^2,$$

和

$$f(z) = z - |b_1|\bar{z} - \frac{1}{(1+\lambda)(1+\alpha)}(1-|b_1|-\beta)z^2$$

证 设 $f \in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta)$. 估计函数模，并利用（4.6.8）式，我们得到

$$|f(z)| \le (1+|b_1|)r + \sum_{k=2}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)r^k \le (1+|b_1|)r + \sum_{k=2}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)r^2$$

$$= (1+|b_1|)r + \frac{1}{(\lambda+\alpha)(1+\alpha)}\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda+\alpha)(1+\alpha)(|a_k|+|b_k|)r^2$$

$$\le (1+|b_1|)r + \frac{1}{(1+\lambda)(1+\alpha)}\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)(|a_k|+|b_k|)r^2$$

$$\le (1+|b_1|)r + \frac{1}{(1+\lambda)(1+\alpha)}(1-|b_1|-\beta)r^2$$

和

$$|f(z)| \ge (1-|b_1|)r - \sum_{k=2}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)r^k \ge (1-|b_1|)r - \sum_{k=2}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)r^2$$

$$\ge (1-|b_1|)r - \frac{1}{(1+\lambda)(1+\alpha)}\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)(|a_k|+|b_k|)r^2$$

$$\ge (1-|b_1|)r - \frac{1}{(1+\lambda)(1+\alpha)}(1-|b_1|-\beta)r^2.$$

证毕.

从定理 4.6.3 还可以得到覆盖性质：

推论 4.6.1. 设 $0 \le \alpha, 0 \le \beta < 1, \lambda+\alpha \ge 1$, 若 $f(z) \in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta)$, 则

$$\left\{w:|w|<\frac{(1+\lambda)(1+\alpha)+\beta-1}{(1+\lambda)(1+\alpha)}+\frac{1-(1+\lambda)(1+\alpha)}{(1+\lambda)(1+\alpha)}|b_1|\right\}\subset f(U).$$

4. 极值点

用 $clcoSHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)$ 表示函数类 $SHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)$ 闭凸包.

定理 4.6.4. 设 $f(z)\in clcoSHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)(0\le\alpha,0\le\beta<1,\lambda+\alpha\ge1)$ 当且仅当

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k h_k+\eta_k g_k), \qquad (4.6.11)$$

其中

$$h_1(z)=z,\ h_k(z)=z-\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}z^k,\ k=2,3,\cdots,$$

$$g_k(z)=z-\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}\bar{z}^k,\ k=1,2,3,\cdots,$$

且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k+\eta_k)=1,\ \mu_k\ge0,\ \eta_k\ge0.$$

特别，$SHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)$ 的极值点是 $\{h_k(z)\}$ 和 $\{g_k(z)\}$.

证 先证充分性. 设 $f(z)$ 具有(4.6.11)式的形式，将 $h_k(z)$ 和 $g_k(z)$ 的展开式代入(4.6.11)式得

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k h_k+\eta_k g_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k+\eta_k)z-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}\mu_k z^k-$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}\eta_k\bar{z}^k$$

于是

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}{1-\beta}\left(\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}\mu_k\right)+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}{1-\beta}\left(\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}\eta_k\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k=1-\mu_1\le 1$$

由定理 4.6.2 可知 $f(z)\in SHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)$ ，从而 $f(z)\in clcoSHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)$.

其次证必要性. 设 $f(z)\in clcoSHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)$. 置

$$\mu_k=\frac{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}{1-\beta}|a_k|,\ k=2,3,\cdots,$$

$$\eta_k=\frac{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)}{1-\beta}|b_k|,\ k=1,2,3,\cdots$$

则由定理 4.6.2 可知 $0\le\mu_k\le 1\ (k=2,3,\cdots)$, $0\le\eta_k\le 1\ (k=1,2,3,\cdots)$. 令

$$\mu_1=1-\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k-\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k$$

显然 $\mu_1\ge 0$. 从而我们得到

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k h_k+\eta_k g_k)$$

利用 4.6.2 容易证明 $SHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)$ 是凸闭，因此 $clcoSHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)=SHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)$. 证毕.

定理 4.6.5. 设 $0\le\alpha, 0\le\beta<1, \lambda+\alpha\ge 1$，则 $SHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)\subset S_H^{*}$.

证 我们只要证明,若 $f=h+\overline{g}\in SHP_{\lambda}^{-}(\alpha,\beta)$，则

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\right\}>0.$$

因为 $\operatorname{Re}w>0$ 当且仅当 $|1+w|>|1-w|$，从而结合（4.6.8）我们得到

$$\left|h(z)+\overline{g(z)}+zh'(z)-\overline{zg'(z)}\right|-\left|h(z)+\overline{g(z)}-zh'(z)+\overline{zg'(z)}\right|$$

$$=\left|2z-\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)|a_k|z^k+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)|b_k|\overline{z}^k\right|-\left|\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)|a_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)|b_k|\overline{z}^k\right|$$

$$\geq 2|z|-\left|\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)|a_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)|b_k|\overline{z}^k\right|-\left|\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)|a_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)|b_k|\overline{z}^k\right|$$

$$\geq 2|z|-\left(\left|\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)|a_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)|b_k|\overline{z}^k\right|+\left|\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)|a_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)|b_k|\overline{z}^k\right|\right)$$

$$\geq 2|z|-\left(\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)|a_k||z|^k+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)|b_k||\overline{z}|^k+\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)|a_k||z|^k+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)|b_k||\overline{z}|^k\right)$$

$$\geq 2|z|\left[1-\left(\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k||z|^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}k|b_k||z|^{k-1}\right)\right]$$

$$>2|z|\left[1-\left(\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)|a_k|+\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)|b_k|\right)\right]$$

$\geq 2|z|[1-(1-\beta)]=2|z|\beta\geq 0$. 证毕.

定理 4.6.6. 设$0\leq\alpha, 0\leq\beta<1, \lambda+\alpha\geq 1$，若$f\in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta)$，则$f(z)$在$|z|<R$内是凸的，其中

$$R=\min_k\left[\frac{1-\beta-|b_1|}{k}\right]^{1/(k-1)}, k=2,3,\cdots, 1-\beta>|b_1|.$$

证 设$f(z)\in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta)$ 和 r, 0<r<1 式 $r^{-1}f(rz)\in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta)$ ，则

$$\sum_{k=2}^{\infty}k^2(|a_k|+|b_k|)r^{k-1}=\sum_{k=2}^{\infty}k(|a_k|+|b_k|)(kr^{k-1})$$

$$\leq\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)(|a_k|+|b_k|)(kr^{k-1})\leq 1-\beta-|b_1|$$

由此推出

$$kr^{k-1}\leq 1-\beta-|b_1|$$

即

$$r \le \min_k \left[\frac{1-\beta-|b_1|}{k}\right]^{1/(k-1)}, k=2,3,\cdots, 1-\beta>|b_1|.$$

结论成立. 证毕.

5. Hadamard 卷积

定义 4.6.4（$\delta-$neighborhood）设

$$f(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\overline{z}^k, \tag{4.6.12}$$

$$F(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|A_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|\overline{z}^k. \tag{4.6.13}$$

则称

$$N_\delta(f)=\left\{F:F(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|A_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|\overline{z}^k \ and \sum_{k=1}^{\infty}k(|a_k-A_k|+|b_k-B_k|)\le\delta\right\}, \tag{4.6.14}$$

为 $f(z)$ 的 $\delta-$neighborhood 领域.

从(4.6.12) 我们得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(|a_k-A_k|+|b_k-B_k|)=|b_1-B_1|+\sum_{k=2}^{\infty}k(|a_k-A_k|+|b_k-B_k|)\le\delta, \tag{4.6.15}$$

定理 4.6.7. 设 $0\le\alpha, 0\le\beta<1, \lambda+\alpha\ge1$，$\delta\le\beta$. 若 $f\in SHP_\lambda^-(\alpha,\beta)$，$F(z)\in N_\delta(f)$，则 $F(z)$ 是调和星象函数.

证 设

$$F(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|A_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|\overline{z}^k\in N_\delta(f)$$

利用（4.6.8）和（4.6.15）我们有

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(|A_k|+|B_k|)+|B_1|\le\sum_{k=2}^{\infty}k(|a_k-A_k|+|b_k-B_k|)+\sum_{k=2}^{\infty}k(|a_k|+|b_k|)+|B_1-b_1|+|b_1|$$

$$\le\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)(|a_k-A_k|+|b_k-B_k|)+|B_1-b_1|+|b_1|+$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha+k\alpha)(|a_k|+|b_k|)$$

$$\leq \delta+|b_1|+(1-\beta-|b_1|)\leq 1.$$

由此得到 $F(z)$ 为调和星象函数. 证毕.

设 $f(z),F(z)\in S_H$，且分别具有（4.6.12）和（4.6.13）式的形式，则 函数 $f(z)$ 和 $F(z)$ 的卷积定义为

$$(f*F)(z)=f(z)*F(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|a_k||A_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}|b_k||B_k|\bar{z}^k . \tag{4.6.16}$$

定理 4.6.8. 设 $0\leq\alpha_1\leq\alpha_2, 0\leq\beta_1\leq\beta_2<1, \lambda+\alpha\geq 1$. 若 $f(z)\in SHP_\lambda^-(\alpha_2,\beta_2)$，$F(z)\in SHP_\lambda^-(\alpha_1,\beta_1)$，则 $(f*F)\in SHP_\lambda^-(\alpha_2,\beta_2)\subset SHP_\lambda^-(\alpha_1,\beta_1)$.

证 设

$$f(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\bar{z}^k\in SHP_\lambda^-(\alpha_2,\beta_2),$$

$$F(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|A_k|z^k-\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|\bar{z}^k\in SHP_\lambda^-(\alpha_1,\beta_1).$$

下面要证明 $f*F$ 的系数满足定理 4.6.2 的条件. 由 $F\in SHP_\lambda^-(\alpha_1,\beta_1)$ 可知 $A_k<1$ 和 $B_k<1$.从（4.6.16）得到

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha_1+k\alpha_1)}{1-\beta_1}|a_k||A_k|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha_1+k\alpha_1)}{1-\beta_1}|b_k||B_K|$$

$$\leq\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha_1+k\alpha_1)}{1-\beta_1}|a_k|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha_1+k\alpha_1)}{1-\beta_1}|b_k|$$

$$\leq\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha_2+k\alpha_2)}{1-\beta_2}|a_k|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^n(1-\alpha_2+k\alpha_2)}{1-\beta_2}|b_k|\leq 1$$

因为 $0\leq\alpha_1\leq\alpha_2$，$0\leq\beta_1\leq\beta_2<1$，$f\in SHP_\lambda^-(\alpha_2,\beta_2)$.所以 $(f*F)\in SHP_\lambda^-(\alpha_2,\beta_2)$ $\subset SHP_\lambda^-(\alpha_1,\beta_1)$. 证毕.

§4.7 用复合算子定义的单叶调和函数类

本节中引进并研究由复合算子定义的单叶调和函数性质[61].

1. 有关的定义

设 $f(z)\in S_H$，我们定义算子 D_λ^m：

$$D_\lambda^0 f(z)=f(z),\ D_\lambda f(z)=(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z),\cdots,D_\lambda^m f(z)=D_\lambda\left(D_\lambda^{m-1}f(z)\right),(\lambda\ge 0).$$

$$D_\lambda^m f(z)=D_\lambda^m h(z)+(-1)^m\overline{D_\lambda^m g(z)} \tag{4.7.1}$$

其中

$$D_\lambda^m h(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^m a_k z^k,\ D_\lambda^m g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^m b_k z^k,|b_1|<1. \tag{4.7.2}$$

当 $\lambda=1$ 时 Salagean 算子 D^m;当 $f(z)$ 为单位圆盘 D 内解析函数式 D_λ^m 就变为 F,M.AL-Oboudi 在[60]中引进的算子 D_λ^n.

定义 4.7.1 设 $m\in N,n\in N_0,m>n,0\le\lambda,0\le\mu,0\le\eta,0\le\beta<1,z\in D,f=h+\overline{g}\in S_H$，$h(z)$ 和 $g(z)$ 具有形式（4.6.1）. 若函数 $f(z)$ 满足条件

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{D_\eta\left(D_\lambda^m f(z)\right)}{D_\mu\left(D_\lambda^n f(z)\right)}\right\}>\beta \tag{4.7.3}$$

其中 $D_\lambda^m f(z)$ 由(4.7.1)式定义，则称 $f(z)\in PS_H(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$.

定义 4.7.2 设 $f_m=h+\overline{g}_m\in PS_H(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$，且 $h(z)$ 和 $g_m(z)$ 具有形式

$$h(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^m|a_k|z^k,\ g_m(z)=(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^m|b_k|z^k. \tag{4.7.4}$$

注 函数类 $PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$ 比较广泛的函数类，[54]-[58] 的函数作为其子类.

1. 系数不等式

我们首先得到函数属于 $PS_H(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$ 的一个充分条件.

定理 4.7.1 设 $f=h+\overline{g}\in S_H$，$h(z)$ 和 $g(z)$ 具有(4.6.1)式的形式，且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|\right)\leq 2\ . \qquad (4.7.5)$$

其中 $a_1=1, m\in N, n\in N_0, m>n, 0\leq\lambda, 0\leq\mu, 0\leq\beta<1$；则 $f(z)$ 在 D 内保向、调和单叶，且 $f\in PS_H(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$.

证 设 $z_1\neq z_2$，则

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right|\geq 1-\left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right|=\left|\frac{\sum_{k=1}^{\infty}b_k\left(z_1^k-z_2^k\right)}{(z_1-z_2)+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\left(z_1^k-z_2^k\right)}\right|>1-\frac{\sum_{k=1}^{\infty}k|b_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k|}$$

$$\geq 1-\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|}\geq 0$$

因此，$f(z)$ 在 D 内单叶. 又因为

$$|h'(z)|\geq 1-\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k||z|^{k-1}>$$

$$1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - \beta(-1)^{m-n}(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k| \geq |g'(z)|.$$

所以$f(z)$在D内保向、调和的.

下面我们利用熟知的结果：$\operatorname{Re} w > \beta$当且仅当$|1-\beta+w| > |1+\beta-w|$, 要证明$f \in PS_H(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$.只要证明

$$\left|(1-\beta)D_\mu(D_\lambda^n f(z)) + D_\eta(D_\lambda^m f(z))\right| - \left|(1+\beta)D_\mu(D_\lambda^n f(z)) - D_\eta(D_\lambda^m f(z))\right| > 0. \quad (4.7.6)$$

即可. 利用 (4.7.1)式，我们有

$$\left|(1-\beta)D_\mu(D_\lambda^n f(z)) + D_\eta(D_\lambda^m f(z))\right| - \left|(1+\beta)D_\mu(D_\lambda^n f(z)) - D_\eta(D_\lambda^m f(z))\right|$$

$$= \Bigg|(2-\beta)z + \sum_{k=2}^{\infty}\left[(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n(1-\beta) + (1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m\right]a_k z^k +$$

$$(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty}\left[(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n(1-\beta) + (-1)^{m-n}(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m\right]\overline{b_k z^k}\Bigg| -$$

$$\Bigg|\beta z + \sum_{k=2}^{\infty}\left[(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - (1+\beta)(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right]a_k z^k -$$

$$(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{m-n}(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - (1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n(1+\beta)\right]\overline{b_k z^k}\Bigg|$$

$$\geq 2(1-\beta)|z| - \sum_{k=2}^{\infty} 2\left[(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - \beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right]|a_k||z|^k -$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(1+\beta)(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n + (-1)^{m-n}(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m\right||b_k||z|^k -$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{m-n}(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - (1+\beta)(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right||b_k||z|^k$$

$$
=\begin{cases}
2(1-\beta)|z|-2\sum_{k=2}^{\infty}\left[(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}\right]|a_k||z|^{k}- \\
\qquad 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}+\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}\right]|b_k||z|^{k}, \quad m-n\text{为奇数} \\
2(1-\beta)|z|-2\sum_{k=2}^{\infty}\left[(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}\right]|a_k||z|^{k}- \\
\qquad 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}\right]|b_k||z|^{k}, \quad m-n\text{为偶数}
\end{cases}
$$

$$
=2(1-\beta)|z|\left\{1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|a_k||z|^{k-1}-\right.
$$

$$
\left.\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|b_k||z|^{k-1}\right\}
$$

$$
>2(1-\beta)\left\{1-\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|a_k|+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|b_k|\right)\right\}.
$$

由(4.7.5)可知,上式右端的表达式为非负，根据 (4.7.6)式即得 $f\in PS_H(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$.

考虑调和函数

$$
f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-\beta}{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}x_k z^{k}+
$$

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\beta}{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}\overline{y_k z^{k}}, \tag{4.7.7}
$$

其中 $m\in N,n\in N_0,m>n$, $\sum_{k=2}^{\infty}|x_k|+\sum_{k=2}^{\infty}|y_k|=1$, 函数（4.7.7）使得(4.7.6)式的等式成立. 事实上

$$
\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|a_k|+\right.
$$

$$\left.\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|\right)=1+\sum_{k=2}^{\infty}|x_k|+\sum_{k=2}^{\infty}|y_k|=2.$$

由此推出 $f(z)\in PS_H(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$. 证毕.

定理 4.7.2. 设函数 $f_m=h+\overline{g}_m\in S_H$， $h(z)$ 和 $g(z)$ 具有 (4.7.4)式的形式. 则 $f_m\in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$ 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\Big((1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\Big)|a_k|+$$

$$\Big((1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\Big)|b_k|\Big]\leq 2(1-\beta). \quad (4.7.8)$$

证 因为 $PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)\subset PS_H(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$，所以有定理 4.7.1 可知充分性成立.下面只证明必要性即可.

由于 f_m 具有(4.7.4)式的形式，我们利用条件 $\operatorname{Re}\{(D_\eta(D_\lambda^m f(z)))/(D_\mu(D_\lambda^n f(z)))\}>\beta$ 得到

$$\operatorname{Re}\Big\{\Big[(1-\beta)z-\sum_{k=2}^{\infty}\Big((1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\Big)a_kz^k+$$

$$(-1)^{2m-1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big((1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\Big)b_k\overline{z}^k\Big]\Big/\Big[z-$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n a_kz^k+(-1)^{m+n-1}\sum_{k=1}^{\infty}(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n b_k\overline{z}^k\Big]\Big\}\geq 0. \quad (4.7.9)$$

在实轴上取 $z\in D$， $0\leq z=r<1$, 当 $r\to 1^-$ 时，(4.7.9)式变为

$$\Big\{\Big[(1-\beta)-\sum_{k=2}^{\infty}\Big((1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\Big)a_kr^{k-1}-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big((1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\Big)b_kr^{k-1}\Big]\Big/\Big[1-$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(1-\mu+k\mu)\left(1+(k-1)\lambda\right)^{n}a_{k}r^{k-1}-(-1)^{m-n}\sum_{k=1}^{\infty}(1-\mu+k\mu)\left(1+(k-1)\lambda\right)^{n}b_{k}r^{k-1}\Bigg]\Bigg\}\geq 0. \quad (4.7.10)$$

因为 $f_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$ ，所以从上式即得（4.7.8）式. 证毕.

2. 极值点 偏差定理

定理 4.7.3. 设 $f_m = h + \overline{g}_m \in S_H$ 且 $h(z)$ 和 $g_m(z)$ 具有(4.7.4)式的形式. 则 $f_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$ 当且仅当

$$f_m(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k h_k(z)+y_k g_{m_k}(z)\right), \quad (4.7.11)$$

其中

$$h_1(z)=z, h_k(z)=z-\frac{1-\beta}{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}z^{k}, k=2,3,\cdots,$$

$$g_{m_K}(z)=z+(-1)^{m-1}\frac{1-\beta}{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}\overline{z}^{k}, k=1,2,3,\cdots,$$

$$x_1=1-\sum_{k=2}^{\infty}(x_k+y_k)=1, x_k\geq 0, y_k\geq 0.$$

$PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$的极值点为$\{h_k\}$ 和$\{g_{m_k}\}$.

证 设$f(z)$ 满足(4.7.11)，我们有

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k h_k(z)+y_k g_{m_k}(z)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)z$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-\beta}{(1-\eta+k\eta)\left(1+(k-1)\lambda\right)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)\left(1+(k-1)\lambda\right)^{n}}x_k z^{k}$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\beta}{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}y_k\overline{z}^k.$$

由此推出

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}\cdot$$

$$\left(\frac{1-\beta}{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}x_k\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}\cdot$$

$$\left(\frac{1-\beta}{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}y_k\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}(x_k+y_k)=1-x_1\le 1.$$

即 $f_m\in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$.

相反，若 $f_m(z)\in clcoPS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$，则

$$|a_k|\le\frac{1-\beta}{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}},$$

$$|b_k|\le\frac{1-\beta}{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}$$

令

$$x_k=\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|a_k|,\ k=2,3,\cdots,$$

$$y_k=\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|b_k|,\ k=1,2,3,\cdots$$

由定理 4.7.2. 可知 $0\le x_k\le 1(k=2,3,\cdots),0\le y_k\le 1(k=1,2,\cdots)$. 我们定义

$$x_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

显然 $x_1 \geq 0$. 从而得到

$$f_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k h_k(z) + y_k g_{m_k}(z) \right)$$

必要性成立. 证毕.

定理 4.7.4 设 $f_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\beta)$.若$|z| = r < 1$时，则有

$$|f_m(z)| \leq (1+|b_1|)r + \frac{1}{(1+\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n} - \beta(1+\mu)} - \frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n} - \beta(1+\mu)} \right) r^2$$

和

$$|f_m(z)| \geq (1-|b_1|)r - \frac{1}{(1+\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n} - \beta(1+\mu)} - \frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n} - \beta(1+\mu)} \right) r^2$$

其极值函数分别为

$$f_m(z) = z - |b_1|\bar{z} - \frac{1}{(1+\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n} - \beta(1+\mu)} - \frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n} - \beta(1+\mu)} |b_1| \right) \bar{z}^2 \text{ 和}$$

$$f_m(z) = z - |b_1|\bar{z} - \frac{1}{(1+\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n} - \beta(1+\mu)} - \frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n} - \beta(1+\mu)} |b_1| \right) z^2$$

且 $|b_1| \leq \left((1-\beta) / \left(1-(-1)^{m-n}\beta\right) \right)$.

证 设$f_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$. 估计函数$f_m$ 的模，得到

$$|f_m(z)| \leq (1+|b_1|)r + \sum_{k=2}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) r^k \leq (1+|b_1|)r + \sum_{k=2}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) r^2$$

$$= (1+|b_1|)r + \frac{1-\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^m - \beta(1+\lambda)^n(1+\mu)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\eta)(1+\lambda)^m - \beta(1+\lambda)^n(1+\mu)}{1-\beta} (|a_k| + |b_k|) r^2$$

$$\leq (1+|b_1|)r + \frac{(1-\beta)r^2}{(1+\lambda)^m - \beta(1+\lambda)^n(1+\mu)}.$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|+\right.$$

$$\left.\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|\right)$$

$$\leq(1+|b_1|)r+\frac{(1-\beta)r^2}{(1+\eta)(1+\lambda)^m-\beta(1+\lambda)^n(1+\mu)}\left(1-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|\right)$$

$$=(1+|b_1|)r+\frac{1}{(1+\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n}-\beta(1+\mu)}-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n}-\beta(1+\mu)}\right)r^2.$$

$$|f_m(z)|\geq(1-|b_1|)r-\sum_{k=2}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)r^k\geq(1-|b_1|)r-\sum_{k=2}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)r^2$$

$$=(1-|b_1|)r-\frac{1-\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^m-\beta(1+\lambda)^n(1+\mu)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+\eta)(1+\lambda)^m-\beta(1+\lambda)^n(1+\mu)}{1-\beta}(|a_k|+|b_k|)r^2$$

$$\geq(1-|b_1|)r-\frac{(1-\beta)r^2}{(1+\eta)(1+\lambda)^m-\beta(1+\lambda)^n(1+\mu)}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|+\right.$$

$$\left.\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|\right)$$

$$\geq(1-|b_1|)r-\frac{(1-\beta)r^2}{(1+\eta)(1+\lambda)^m-\beta(1+\lambda)^n(1+\mu)}\left(1-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|\right)$$

$$=(1-|b_1|)r-\frac{1}{(1+\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n}-\beta(1+\mu)}-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^{m-n}-\beta(1+\mu)}|b_1|\right)r^2.$$

证毕.

推论 4.7.1 设 $f_m\in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$, 则

$$\left\{w:|w|<\frac{(1+\eta)(1+\lambda)^m-\beta(1+\lambda)^n(1+\mu)-1+\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^m-\beta(1+\lambda)^n(1+\mu)}-\frac{(1+\eta)(1+\lambda)^m-\beta(1+\lambda)^n(1+\mu)-1+(-1)^{m-n}\beta}{(1+\eta)(1+\lambda)^m-\beta(1+\lambda)^n(1+\mu)}|b_1|\right\}$$

$\subset f_m(U)$.

3. 卷积性质、凸组合

设 $f_m(z), F_m(z) \in S_H$，且具有形式

$$f_m(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| z^k + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \bar{z}^k$$

$$F_m(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |A_k| z^k + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \bar{z}^k$$

则两个函数 $f_m(z)$ 和 $F_m(z)$ 的卷积定义为

$$(f * F)(z) = f(z) * F(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| |A_k| z^k + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |B_k| \bar{z}^k, \tag{4.7.12}$$

我们讨论函数类 $PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$ 中函数的卷积性质.

定理 4.7.5. 设 $0 \le \mu_1 \le \mu_2, 0 \le \beta_1 \le \beta_2 < 1$，若

$$f_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu_2,\eta,\beta_2), F_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu_1,\eta,\beta_1).$$

则 $f_m * F_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu_2,\eta,\beta_2) \subset PS_H^-(m,n;\lambda,\mu_1,\eta,\beta_1)$.

证 设

$$f_m(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| z^k + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \bar{z}^k \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu_2,\eta,\beta_2),$$

$$F_m(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |A_k| z^k + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \bar{z}^k \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu_1,\eta,\beta_1)$$

则现在需要证明卷积函数 $f_m * F_m$ 的系数满足定理 4.7.2 的条件. 由 $F_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu_1,\eta,\beta_1)$ 可知 $|A_k| < 1$, $|B_k| < 1$. 从而由 $f_m * F_m$ 的卷积定义，得到

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - \beta_1(1-\mu_1+k\mu_1)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_1} |a_k| |A_k| +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - (-1)^{m-n} \beta_1(1-\mu_1+k\mu_1)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_1} |b_k| |B_k|.$$

$$\le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - \beta_1(1-\mu_1+k\mu_1)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_1}|a_k| +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - (-1)^{m-n}\beta_1(1-\mu_1+k\mu_1)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_1}|b_k|$$

$$\le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - \beta_1(1-\mu_2+k\mu_2)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_2}|a_k| +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - (-1)^{m-n}\beta_2(1-\mu_2+k\mu_2)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_2}|b_k| \le 1.$$

因 $0 \le \mu_1 \le \mu_2, 0 \le \beta_1 \le \beta_2 < 1$， $f_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu_2,\eta,\beta_2)$. 所以

$$f_m * F_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu_2,\eta,\beta_2) \subset PS_H^-(m,n;\lambda,\mu_1,\eta,\beta_1).$$

证毕.

定理 4.7.6 . 函数类 $PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$ 为凸组合下是闭集.

证 设 $f_{m_j} \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$， $j=1,2,\cdots$,具有形式

$$f_{m_j}(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty}|a_{k_j}|z^k + (-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{k_j}|\bar{z}^k$$

且满足条件（4.7.8）式. 即

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - \beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_{k_j}| + \frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - (-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_{k_j}|\right] \le 2. \quad (4.7.13)$$

对于 $\sum_{j=1}^{\infty} t_j = 1, 0 \le t_j \le 1$， f_{m_j} 的凸组合可以表示为

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_j f_{m_j}(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j a_{k_j}\right)z^k + (-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j b_{k_j}\right)\bar{z}^k.$$

则由 (4.7.13)式和定理 4.7.2 得到,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}\sum_{j=1}^{\infty}t_j a_{k_j}+\right.$$

$$\left.\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}\sum_{j=1}^{\infty}t_j b_{k_j}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}t_j\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}a_{k_j}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}b_{k_j}\right)\right]\le 2\sum_{j=1}^{\infty}t_j=2$$

即 $\sum_{j=1}^{\infty}t_j f_{m_j}(z)\in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$. 证毕.

定理 4.7.7 设 $f_{m_j}\in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu;\eta,\beta)$ ，则 f_{m_j} 在 $|z|<R$ 内为凸函数，其中

$$R=\min_k\left\{\frac{(1-|b_1|)(1-\beta)}{k\left[1-\beta-\left(1-(-1)^{m-n}\beta\right)|b_1|\right]}\right\}^{1/(k-1)},k=2,3,\cdots.$$

证 设 $f_{m_j}\in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$, r, 0<r<1, 则

$$r^{-1}f_m(rz)\in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta),$$

且得到

$$\sum_{k=2}^{\infty}k^2(|a_k|+|b_k|)r^{k-1}=\sum_{k=2}^{\infty}k(|a_k|+|b_k|)(kr^{k-1})\le$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|+\right.$$

$$\left.\frac{(1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|\right)kr^{k-1}\le 1-|b_1|.$$

由此可得

$$kr^{k-1} \le \frac{1-|b_1|}{1-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}}$$

即

$$r \le R = \min_k \left\{ \frac{(1-|b_1|)(1-\beta)}{k\left[1-\beta-\left(1-(-1)^{m-n}\beta\right)|b_1|\right]} \right\}^{1/(k-1)}, k = 2,3,\cdots.$$

所以结论成立. 证毕.

定理 4.7.8 设 c>-1, $f_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$, 定义

$$F(z) = I(f_m) = I(h) + (-1)^m \overline{I(g_m)}, \tag{4.7.14}$$

其中

$$I(h) = \frac{c+1}{z}\int_0^z t^{c-1}h(t)dt, \quad I(g_m) = \frac{c+1}{z}\int_0^z t^{c-1}g(t)dt. \tag{4.7.15}$$

则 $F(z) \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$.

证 设 c>-1, $f_m \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$, $F(z)$的定义(4.7.14), 我们得到

$$F(z) = I(f_m) = z - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{c+1}{c+k}|a_k|z^k + (-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c+1}{c+k}|b_k|\bar{z}^k \quad. \tag{4.7.16}$$

并应用定理 4.7.2, 推出

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left((1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - \beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right)\frac{c+1}{c+k}|a_k| + \right.$$

$$\left.\left((1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - (-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right)\frac{c+1}{c+k}|b_k|\right]$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left((1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - \beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right)|a_k| + \right.$$

$$\left.\left((1-\eta+k\eta)(1+(k-1)\lambda)^m - (-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right)|b_k|\right] \le 2(1-\beta).$$

因此由定理 4.7.2 可知 $F(z) \in PS_H^-(m,n;\lambda,\mu,\eta,\beta)$. 证毕.

§4.8 用算子定义的缺系数的单叶调和函数类

本节中引进新的单叶调和函数类，并讨论它的性质[64].

设 $S_{H;j}$ 表示在 D 内满足条件 $f(0)=f_z(0)-1=0$ 的单叶调和函数 $f=h+\overline{g}$ 的全体，其中函数 $h(z)$ 和 $g(z)$ 具有形式

$$h(z)=z+\sum_{k=j+1}^{\infty}a_k z^k,\qquad g(z)=b_1 z+\sum_{k=j+1}^{\infty}b_k z^k,\ |b_1|<1. \tag{4.8.1}$$

我们在 $S_{H,j}$ 上引进算子 $D_{\lambda,j}^m$： 设 $f(z)\in S_{H,j}$，则定义

$$D_{\lambda,j}^0 f(z)=f(z),\ D_{\lambda,j}f(z)=(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z),\cdots,D_{\lambda,j}^m f(z)=D_{\lambda,j}\left(D_{\lambda,j}^{m-1}f(z)\right),(\lambda\ge 0).$$

$$D_\lambda^m f(z)=D_\lambda^m h(z)+(-1)^m\overline{D_\lambda^m g(z)} \tag{4.8.2}$$

其中

$$D_{\lambda,j}^m h(z)=z+\sum_{k=j+1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^m a_k z^k,\ D_{\lambda,j}^m g(z)=b_1 z+\sum_{k=j+1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^m b_k z^k, \tag{4.8.3}$$

当 $D_{\lambda,j}^m$ 中,分别 $\lambda=1,j=1$ 和 $j=1$ 时,就得到[62],[63]中引进的算子.

定义 4.8.1[64] 设 $m\in N,n\in N_0,m>n,j\in N,0\le\lambda,0\le\mu,0\le\beta<1$，若 $f(z)\in S_{H,j}$ 满足条件

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{D_{\lambda,j}^m f(z)}{D_{\mu,j}\left(D_{\lambda,j}^n f(z)\right)}\right\}>\beta\ . \tag{4.8.4}$$

其中 $D_{\lambda,j}^m f(z)$ 和 $D_{\lambda,j}^n f(z)$ 具有(4.8.2)式形式，则称 $f(z)\in PT_H(m,n;\lambda,\mu,\beta)$.

用 $PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$ 表示函数 $f=h+\overline{g}_m\in PT_H(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$ 的全体组成的类，其中 h，g_m 具有形式

$$h(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^m|a_k|z^k,\ g_m(z)=(-1)^{m-1}\left[|b_1|z+\sum_{k=j+1}^{\infty}(1+(k-1)\lambda)^m|b_k|z^k\right], \quad (4.8.5)$$

注 函数类 $PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$推广了［53］－［58］的函数类.

1. 系数不等式

首先给出函数 $f(z)\in PT_H(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$的一个充分条件.

定理 4.8.1 设 $f=h+\overline{g}_m\in S_{H,j}$ ，$h(z)$和$g(z)$具有形式(4.8.1)，若满足条件

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|+\right.$$

$$\left.+\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|\right)\le 1-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|. \quad (4.8.6)$$

其中 $a_1=1,\ m\in N,n\in N_0;m>n,k,j\in N,k\ge j+1,0\le\lambda,0\le\mu,0\le\beta<1$；则 $f(z)$

在D内保向、单叶调和函数，且$f\in PT_H(m,n;\lambda,\mu,\beta)$.

证 设 $z_1\ne z_2$，则

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right|\ge 1-\left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)}\right|=\left|\frac{b_1(z_1-z_2)+\sum_{k=j+1}^{\infty}b_k(z_1^k-z_2^k)}{(z_1-z_2)+\sum_{k=j+1}^{\infty}a_k(z_1^k-z_2^k)}\right|>1-\frac{|b_1|+\sum_{k=j+1}^{\infty}k|b_k|}{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}k|a_k|}$$

$$\ge 1-\frac{\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|+\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|}{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|}\ge 0$$

因此f D内保向、单叶的. f又是f D内的调和函数，这是因为

$$|h'(z)|\ge 1-\sum_{k=j+1}^{\infty}k|a_k||z|^{k-1}>1-\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|$$

$$\geq \frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1| + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{(1+(k-1)\lambda)^m - \beta(-1)^{m-n}(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k| \geq |g'(z)|.$$

利用熟知的结论： $\operatorname{Re} w > \beta$ 当且仅当 $|1-\beta+w| > |1+\beta-w|$, 我们要证明 $f \in PT_H(m,n;\lambda,\mu,\beta)$. 只需证明不等式

$$\left|(1-\beta)D_{\mu,j}\left(D_{\lambda,j}^n f(z)\right) + D_{\lambda,j}^m f(z)\right| - \left|(1+\beta)D_{\mu,j}\left(D_{\lambda,j}^n f(z)\right) - D_{\lambda,j}^m f(z)\right| > 0. \quad (4.8.7)$$

即可.

利用 $D_{\lambda,j}^n f(z)$ 和 $D_{\lambda,j}^m f(z)$ 的幂级数展开式，得到

$$\left|(1-\beta)D_{\mu,j}\left(D_{\lambda,j}^n f(z)\right) + D_{\lambda,j}^m f(z)\right| - \left|(1+\beta)D_{\mu,j}\left(D_{\lambda,j}^n f(z)\right) - D_{\lambda,j}^m f(z)\right|$$

$$= \Bigg|(2-\beta)z + \sum_{k=j+1}^{\infty}\left[(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n(1-\beta) + (1+(k-1)\lambda)^m\right]a_k z^k +$$

$$(-1)^n\overline{b_1 z} + (-1)^n\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n(1-\beta) + (-1)^{m-n}(1+(k-1)\lambda)^m\right]\overline{b_k z^k}\Bigg| -$$

$$\Bigg|\beta z + \sum_{k=j+1}^{\infty}\left[(1+(k-1)\lambda)^m - (1+\beta)(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right]a_k z^k -$$

$$(-1)^n\overline{b_1 z} - (-1)^n\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[(-1)^{m-n}(1+(k-1)\lambda)^m - (1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n(1+\beta)\right]\overline{b_k z^k}\Bigg|$$

$$\geq 2(1-\beta)|z| - \sum_{k=j+1}^{\infty}2\left[(1+(k-1)\lambda)^m - \beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right]|a_k||z|^k -$$

$$\left(1+\beta+(-1)^{m-n}\right)|b_1||z| - \sum_{k=j+1}^{\infty}\left|(1+\beta)(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n + (-1)^{m-n}(1+(k-1)\lambda)^m\right||b_k||z|^k -$$

$$\left[(-1)^{m-n} - (1-\beta)\right]|b_1||z| - \sum_{k=j+1}^{\infty}\left|(-1)^{m-n}(1+(k-1)\lambda)^m - (1+\beta)(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right||b_k||z|^k$$

$$
=\begin{cases}
2(1-\beta)|z|-2\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}\left[\left(1+(k-1)\lambda\right)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)\left(1+(k-1)\lambda\right)^{n}\right]|a_k||z|^{k}- \\
\qquad 2(1+\beta)|b_1||z|-2\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}\left[\left(1+(k-1)\lambda\right)^{m}+\beta(1-\mu+k\mu)\left(1+(k-1)\lambda\right)^{n}\right]|b_k||z|^{k}, \quad m-n\text{为奇数} \\
2(1-\beta)|z|-2\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}\left[\left(1+(k-1)\lambda\right)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)\left(1+(k-1)\lambda\right)^{n}\right]|a_k||z|^{k}- \\
\qquad (1-\beta)|b_1||z|-2\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}\left[\left(1+(k-1)\lambda\right)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)\left(1+(k-1)\lambda\right)^{n}\right]|b_k||z|^{k}, \quad m-n\text{为偶数}
\end{cases}
$$

$$
=2(1-\beta)|z|\left\{1-\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|a_k||z|^{k-1}-\right.
$$

$$
\left.\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|-\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|b_k||z|^{k-1}\right\}
$$

$$
>2(1-\beta)\left\{1-\left(\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|a_k|+\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^{n}}{1-\beta}|b_k|\right)\right\}.
$$

由 (4.8.6)可知，这个不等式的右端为非负的，因此$f\in PT_H(m,n;\lambda,\mu,\beta)$. 证毕.

考虑单叶调和函数

$$
f(z)=z+\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1-\beta}{\left(1+(k-1)\lambda\right)^{m}-\beta(1-\mu+k\mu)\left(1+(k-1)\lambda\right)^{n}}x_k z^{k}+\frac{1-\beta}{1-(-1)^{m-n}\beta}\overline{y_1 z}+
$$

$$
\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1-\beta}{\left(1+(k-1)\lambda\right)^{m}-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)\left(1+(k-1)\lambda\right)^{n}}\overline{y_k z^{k}}, \qquad (4.8.8)
$$

其中$m\in N,n\in N_0,m>n$, $\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}|x_k|+|y_1|+\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}|y_k|=1$, 使得不等式（4.8.6）等号成立的函数为（4.8.8）.事实上

$$1+\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|+\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|+\right.$$

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|=1+\sum_{k=j+1}^{\infty}|x_k|+|y_1|+\sum_{k=j+1}^{\infty}|y_k|=2.\right.$$

因此 $f(z)\in PT_H(m,n;\lambda,\mu,\beta)$. 证毕.

定理 4.8.2. 设 $f_m=h+\overline{g}_m\in S_{H,j}$，$h$ 和 g_m 具有形式 (4.8.5). 则 $f_m\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$ 当且仅当

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\Big[\Big((1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\Big)|a_k|+$$

$$\Big((1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\Big)|b_k|\Big]\le$$

$$\left(1-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|\right)(1-\beta). \tag{4.8.9}$$

证 因为 $PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)\subset PT_H(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$, 由定理 4.8.1 可知充分性显然成立. 下面只需证明必要性. 利用 (4.8.5) 和条件 $\operatorname{Re}\{(D_{\lambda,j}^m f(z))/(D_{\mu,j}(D_{\lambda,j}^n f(z)))\}>\beta$，我们有

$$\operatorname{Re}\Bigg\{\Big[(1-\beta)z-\sum_{k=j+1}^{\infty}\Big((1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\Big)a_kz^k+$$

$$(-1)^{2m-1}\sum_{k=j+1}^{\infty}\Big((1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\Big)b_k\overline{z}^k\Big]\Big/\Big[z-$$

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n a_kz^k+(-1)^{m+n-1}|b_1|\overline{z}+(-1)^{m+n-1}\sum_{k=1}^{\infty}(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n b_k\overline{z}^k\Big]\Bigg\}\ge 0.$$

(4.8.10)

沿着实轴取点 $z\in D,\ 0\le z=r<1$, 并上式中令 $r\to 1^-$ 就得到

$$\left\{\left[(1-\beta)-\sum_{k=j+1}^{\infty}\left((1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right)a_k r^{k-1}-\right.\right.$$

$$\left.(1-(-1)^{m-n}\beta)|b_1|-\sum_{k=j+1}^{\infty}\left((1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right)b_k r^{k-1}\right]\Big/\left[1-\right.$$

$$\left.\left.\sum_{k=j+1}^{\infty}(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n a_k r^{k-1}-(-1)^{m-n}|b_1|-(-1)^{m-n}\sum_{k=1}^{\infty}(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n b_k r^{k-1}\right]\right\}\geq 0.$$

（4.8.11）

由此即得 $f_m \in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$.证毕.

2. 极值点、偏差定理

定理 4.8.3. 函数 $f_m \in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$ 当且仅当

$$f_m(z)=\sum_{k=j}^{\infty}\left(x_k h_k(z)+y_k g_{m_k}(z)\right), \tag{4.8.12}$$

其中

$$h_j(z)=z,\ h_k(z)=z-\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}z^k,\ k=j+1,j+2,\cdots,$$

$$g_{m_j}(z)=b_1\bar{z},\ g_{m_K}(z)=z+(-1)^{m-1}\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}\bar{z}^k,$$

$$x_j=x_1,\ y_j=y_1,\ x_1=1-\sum_{k=j+1}^{\infty}x_k-\sum_{k=j}^{\infty}y_k=1,\ x_k\geq 0,\ y_k\geq 0, k=j+1,j+2,\cdots.$$

函数类 $PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$ 的极值点为 $\{h_k\}$ 和 $\{g_{m_k}\}$ $(k=j,j+1,\cdots)$.

证 设函数 f 具有形式(4.8.12)，将 h 和 g_m 的展开式（4.8.5）代入到 (4.8.12) 中，得到

$$f(z)=\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(x_k h_k(z)+y_k g_{m_k}(z)\right)=\sum_{k=j}^{\infty}(x_k+y_k)z-\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}x_k z^k$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{1-\beta}{1-(-1)^{m-n}\beta}y_j\bar{z}+(-1)^{m-1}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}y_k\bar{z}^k.$$

则

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}\left(\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}x_k\right)$$

$$+\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}\left(\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}y_k\right)$$

$$=\sum_{k=j+1}^{\infty}x_k+\sum_{k=j}^{\infty}y_k=1-x_j\le 1.$$

所以 $f_m\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$.

相反，设 $f_m(z)\in clcoPT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$, 则

$$|a_k|\le\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n},$$

$$|b_k|\le\frac{1-\beta}{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}.$$

令

$$x_k=\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|,\ k=j+1,j+2,\cdots,$$

$$y_j=\frac{1+(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|,\ y_k=\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|,\ k=j+1,j+2,\cdots.$$

由定理 4.8.2. 可知 $0\le x_k\le 1,\ 0\le y_k\le 1$.定义

$$x_j=1-\sum_{k=j+1}^{\infty}x_k-\sum_{k=j}^{\infty}y_k$$

显然 $x_j \geq 0$. 从而，得到

$$f_m(z)=\sum_{k=j}^{\infty}\left(x_k h_k(z)+y_k g_{m_k}(z)\right)$$

故必要性成立. 证毕.

定理 4.8.4. 设 $f_m \in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$. 若 $|z|=r<1$ 时，则有

$$|f_m(z)|\leq(1+|b_1|)r+\frac{1}{(1+j\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+j\lambda)^{m-n}-\beta(1+j\mu)}-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+j\lambda)^{m-n}-\beta(1+j\mu)}\right)r^{j+1}$$

和

$$|f_m(z)|\geq(1-|b_1|)r-\frac{1}{(1+j\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+j\lambda)^{m-n}-\beta(1+j\mu)}-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+j\lambda)^{m-n}-\beta(1+j\mu)}\right)r^{j+1}$$

其极值函数分别为

$$f_m(z)=z-|b_1|\bar{z}-\frac{1}{(1+j\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+j\lambda)^{m-n}-\beta(1+j\mu)}-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+j\lambda)^{m-n}-\beta(1+j\mu)}|b_1|\right)\bar{z}^{j+1},$$

和

$$f_m(z)=z-|b_1|\bar{z}-\frac{1}{(1+j\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+j\lambda)^{m-n}-\beta(1+j\mu)}-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+j\lambda)^{m-n}-\beta(1+j\mu)}|b_1|\right)z^{j+1}$$

其中 $|b_1|\leq\left((1-\beta)/\left(1-(-1)^{m-n}\beta\right)\right)$.

证 设 $f_m \in PT_H^-(m,n;j;\lambda,\mu,\beta)$. 估计函数 f_m 的模，我们得到

$$\begin{aligned}
|f_m(z)| &\leq (1+|b_1|)r+\sum_{k=2}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)r^k \leq (1+|b_1|)r+\sum_{k=j+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)r^{j+1}\\
&=(1+|b_1|)r+\frac{1-\beta}{(1+j\lambda)^m-\beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+j\lambda)^m-\beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu)}{1-\beta}(|a_k|+|b_k|)r^{j+1}\\
&\leq(1+|b_1|)r+\frac{(1-\beta)}{(1+j\lambda)^m-\beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|+\right.\\
&\qquad\left.\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|\right)r^{j+1}
\end{aligned}$$

$$\le (1+|b_1|)r + \frac{(1-\beta)}{(1+j\lambda)^m - \beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu)}\left(1 - \frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|\right)r^{j+1}$$

$$= (1+|b_1|)r + \frac{1}{(1+j\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+j\lambda)^{m-n} - \beta(1+j\mu)} - \frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+j\lambda)^{m-n} - \beta(1+j\mu)}\right)r^{j+1}.$$

$$|f_m(z)| \ge (1-|b_1|)r - \sum_{k=j+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)r^k \ge (1-|b_1|)r - \sum_{k=j+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)r^{j+1}$$

$$= (1-|b_1|)r - \frac{1-\beta}{(1+j\lambda)^m - \beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+j\lambda)^m - \beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu)}{1-\beta}(|a_k|+|b_k|)r^{j+1}$$

$$\ge (1-|b_1|)r - \frac{(1-\beta)}{(1+j\lambda)^m - \beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu)}\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{(1+(k-1)\lambda)^m - \beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k| + \frac{(1+(k-1)\lambda)^m - (-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|\right)r^{j+1}$$

$$\ge (1-|b_1|)r - \frac{(1-\beta)}{(1+j\lambda)^m - \beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu)}\left(1 - \frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|\right)r^{j+1}$$

$$= (1-|b_1|)r - \frac{1}{(1+j\lambda)^n}\left(\frac{1-\beta}{(1+j\lambda)^{m-n} - \beta(1+j\mu)} - \frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{(1+j\lambda)^{m-n} - \beta(1+j\mu)}|b_1|\right)r^{j+1}.$$

从定理 4.8.4 得到覆盖性质：

推论 4.8.1. 设 $f_m \in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$，则

$$\left\{w:|w| < \frac{(1+j\lambda)^m - \beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu) - 1 + \beta}{(1+j\lambda)^m - \beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu)} - \frac{(1+j\lambda)^m - \beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu) - 1 + (-1)^{m-n}\beta}{(1+j\lambda)^m - \beta(1+j\lambda)^n(1+j\mu)}|b_1|\right\}$$

$\subset f_m(U)$.

3. 卷积性质 凸组合

设调和函数 $f_m, F_m \in S_{H,j}$，且具有形式

$$f_m(z) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty}|a_k|z^k + (-1)^{m-1}|b_1|\bar{z} + (-1)^{m-1}\sum_{k=j+1}^{\infty}|b_k|\bar{z}^k,$$

$$F_m(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}|A_k|z^k+(-1)^{m-1}|B_1|\overline{z}+(-1)^{m-1}\sum_{k=j+1}^{\infty}|B_k|\overline{z}^k$$

则两个函数 $f_m(z)$ 和 $F_m(z)$ 的卷积定义为

$$(f_m*F_m)(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}|a_k||A_k|z^k+(-1)^{m-1}|b_1||B_1|\overline{z}+(-1)^{m-1}\sum_{k=j+1}^{\infty}|b_k||B_k|\overline{z}^k. \quad (4.8.13)$$

定理 4.8.5. 设 $0\le\mu_1\le\mu_2, 0\le\beta_1\le\beta_2<1$ 若

$$f_m\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu_2,\beta_2), F_m\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu_1,\beta_1).$$

则 $f_m*F_m\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu_2,\beta_2)\subset PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu_1,\beta_1)$.

证 设

$$f_m(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}|a_k|z^k+(-1)^{m-1}|b_1|\overline{z}+(-1)^{m-1}\sum_{k=j+1}^{\infty}|b_k|\overline{z}^k\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu_2,\beta_2),$$

$$F_m(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}|A_k|z^k+(-1)^{m-1}|B_1|\overline{z}+(-1)^{m-1}\sum_{k=j+1}^{\infty}|B_k|\overline{z}^k\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu_1,\beta_1)$$

现在需要证明卷积函数 f_m*F_m 的系数满足定理 2 的条件. 由于 $F_m\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu_1,\beta_1)$ ，由定理 4.8.2 可知 $|A_k|<1,|B_k|<1$.根据卷积的定义，我们有

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta_1(1-\mu_1+k\mu_1)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_1}|a_k||A_k|+|b_1||B_1|+$$

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta_1(1-\mu_1+k\mu_1)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_1}|b_k||B_k|$$

$$\le\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta_1(1-\mu_1+k\mu_1)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_1}|a_k|+\frac{1-(-1)^{m-n}\beta_1}{1-\beta_1}|b_1|+$$

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta_1(1-\mu_1+k\mu_1)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_1}|b_k|$$

$$\le \sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta_1(1-\mu_2+k\mu_2)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_2}|a_k|+\frac{1-(-1)^{m-n}\beta_2}{1-\beta_2}|b_1|+$$

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta_2(1-\mu_2+k\mu_2)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta_2}|b_k|\le 1.$$

因为 $0\le\mu_1\le\mu_2, 0\le\beta_1\le\beta_2<1$， $f_m\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu_2,\beta_2)$. 因此由定理 4.8.2 可知 $f_m * F_m\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu_2,\beta_2)\subset PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu_1,\beta_1)$. 证毕.

定理 4.8.6 . 设函数类 $PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$ 在凸组合下是闭集.

证 设 $i=1,2,\cdots$， $f_{m_i}\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$， f_{m_i} 具有形式

$$f_{m_i}(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}|a_{k_i}|z^k+(-1)^{m-1}|b_{1_i}|\bar{z}+(-1)^{m-1}\sum_{k=j+1}^{\infty}|b_{k_i}|\bar{z}^k$$

且满足 (4.8.9)式,即

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_{k_i}|+\right.$$

$$\left.\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_{k_j}|\right]\le 1-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|. \tag{4.8.14}$$

对于 $\sum_{i=1}^{\infty}t_i=1, 0\le t_i\le 1$， f_{m_i} 的凸组合可以表示为

$$\sum_{i=1}^{\infty}t_i f_{m_i}(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_i|a_{k_i}|\right)z^k+(-1)^{m-1}\sum_{i=1}^{\infty}t_i|b_{1_i}|\bar{z}+\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_i|b_{k_i}|\right)\bar{z}^k.$$

利用（4.8.14）得到

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}\sum_{i=1}^{\infty}t_i|a_{k_i}|+\right.$$

$$\left.\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}\sum_{i=1}^{\infty}t_i|b_{k_i}|\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}t_i|b_{1_i}|$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}t_i\left[\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}\left|a_{k_i}\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}\left|b_{k_i}\right|\right)\right]$$

$$\leq\left(1-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|\right)\sum_{i=1}^{\infty}t_i=1-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|$$

根据定理 4.8.2 推出 $\sum_{i=1}^{\infty}t_i f_{m_i}(z)\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$..证毕.

4. 凸半径 积分算子

定理 4.8.7. 设 $f_m\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$ 则函数 f_m 在 $|z|<R$ 内凸函数，其中

$$R=\min_k\left\{\frac{(1-|b_1|)(1-\beta)}{k\left[1-\beta-\left(1-(-1)^{m-n}\beta\right)|b_1|\right]}\right\}^{1/(k-1)},k=j+1,j+2,\cdots$$

证 设 $f_m\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$, r, 0<r<1, 则

$$r^{-1}f_m(rz)\in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta),$$

从而有

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}k^2\left(|a_k|+|b_k|\right)r^{k-1}=\sum_{k=j+1}^{\infty}k\left(|a_k|+|b_k|\right)\left(kr^{k-1}\right)\leq$$

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|a_k|+\right.$$

$$\left.\frac{(1+(k-1)\lambda)^m-(-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n}{1-\beta}|b_k|\right)kr^{k-1}\leq1-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|.$$

由此得到

$$kr^{k-1} \le \frac{1-|b_1|}{1-\dfrac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}}$$

即

$$r \le R = \min_k \left\{ \frac{(1-|b_1|)(1-\beta)}{k\left[1-\beta-\left(1-(-1)^{m-n}\beta\right)|b_1|\right]} \right\}^{1/(k-1)}, k = j+1, j+2, \cdots.$$

证毕.

定理 4.8.8. 设 c>-1, $f_m \in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$，定义

$$F(z) = I(f_m) = I(h) + (-1)^m \overline{I(g_m)} \tag{4.8.15}$$

其中

$$I(h) = \frac{c+1}{z}\int_0^z t^{c-1}h(t)dt, \quad I(g_m) = \frac{c+1}{z}\int_0^z t^{c-1}g(t)dt. \tag{4.8.16}$$

则 $F(z) \in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$.

证 设 c>-1, $f_m \in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$，从（4.8.15）和(4.8.16)式，得到

$$F(z) = I(f_m) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{c+1}{c+k}|a_k|z^k + (-1)^{m-1}|b_1|\bar{z} + (-1)^{m-1}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{c+1}{c+k}|b_k|\bar{z}^k. \tag{4.8.17}$$

利用定理 4.8.2，我们有

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}\Bigg[\left((1+(k-1)\lambda)^m - \beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right)\frac{c+1}{c+k}|a_k| +$$
$$\left((1+(k-1)\lambda)^m - (-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right)\frac{c+1}{c+k}|b_k|\Bigg]$$

$$\le \sum_{k=j+1}^{\infty}\Bigg[\left((1+(k-1)\lambda)^m - \beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right)|a_k| +$$
$$\left((1+(k-1)\lambda)^m - (-1)^{m-n}\beta(1-\mu+k\mu)(1+(k-1)\lambda)^n\right)|b_k|\Bigg] \le \left(1-\frac{1-(-1)^{m-n}\beta}{1-\beta}|b_1|\right)(1-\beta).$$

由定理 4.8.2 可知 $F(z) \in PT_H^-(m,n,j;\lambda,\mu,\beta)$. 证毕.

问 题

1. 设γ为非零复数时，讨论函数类

$$T_{n,k}^{-}(p,\gamma)=\left\{f(z)\in T_k^{-}(p):\mathrm{Re}\left[1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n}f(z)}-p\right)\right]>0,z\in U\right\}$$

的性质.

2. 若函数类$C_p'(\sigma,\alpha,\beta)$，$B_{p,\lambda,\alpha}(A,B,C,D)$中的函数为亚纯函数时，讨论其性质.

3. 设$p\in N,0\le\alpha<p,-1\le b<a\le 1,$，若$f(z)\in A_p$满足条件

$$\frac{D^{\lambda+p}f(z)}{D^{\lambda+p-1}f(z)}\prec\frac{p+\left[pb+(a-b)(p-\alpha)\right]z}{1+bz}$$

则称$S_p(\alpha,a,b)$.讨论函数类$S_p(\alpha,a,b)$的性质.

4. 设$p\in N,0<\mu<1,-\mu\le\eta<1,$，若$f(z)\in A_p$满足条件

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{D^{\lambda+p}f(z)}{D^{\lambda+p-1}f(z)}\right\}-p\eta>\mu\left|\frac{D^{\lambda+p}f(z)}{D^{\lambda+p-1}f(z)}-p\right|$$

则称$f(z)\in ACV_p(\mu,\eta)$.讨论函数类$ACV_p(\mu,\eta)$的性质.

5. 设$j,k\in N,k\ge j+1,a_k\ge 0,\lambda,\alpha,\beta\in[0,1)$.若函数$f(z)=z-\sum_{k=j+1}^{\infty}a_kz^k$在单位圆盘$D$内解析，且满足条件

$$\mathrm{Re}\frac{(1-z)D^{n+m}f(z)+\alpha zD^{n}f(z)}{\lambda(1-z)D^{n+m}f(z)+\left[\lambda z\alpha+(1-\lambda)(1-z)\right]D^{n}f(z)}>\beta$$

其中D^n为Salagean算子，则称$f(z)\in H_j^{-}(n,m,\alpha,\beta)$，讨论函数类$H_j^{-}(n,m,\alpha,\beta)$的性质.

6. 设$\alpha\ge 0,0<\beta\le 1,$函数$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in S,$且满足条件

$$\left|\arg\left\{\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1-\alpha}\left(f'(z)\right)^{\alpha}\right\}\right|\le\frac{\pi}{2}\beta.$$

则称 $f(z)$ 为 $\alpha-\log arithmi$ 函数，其全体记为 $LH^{\alpha}(\beta)$. 论该类的性质.

7. 设 $\alpha\ge0, 0<\beta\le1$, 函数 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in S$, 若 $\exists g(z)\in LH^{\alpha}(\beta)$, 使得

$$\left|\arg\left\{\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{(zf'(z))'}{g'(z)}\right)^{\alpha}\right\}\right|\le\frac{\pi}{2}\beta.$$

则称 $f(z)\in CLH^{\alpha}(\beta)$，讨论该类的性质.

8. 设 $\lambda\ge0, \alpha\in[0,1), \beta\in(0,1]$， $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n, |b_1|<1$

在单位圆盘 D 内解析， $f(z)=h+\overline{g}\in S_H$， 在 S_H 上定义 Salagean 算子 D_{λ}^{m}：

$$D_{\lambda}^{0}f(z)=f(z),\ D_{\lambda}f(z)=(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z),\cdots,D_{\lambda}^{m}f(z)=D_{\lambda}\left(D_{\lambda}^{m-1}f(z)\right),(\lambda\ge0).$$

$$D_{\lambda}^{m}f(z)=D_{\lambda}^{m}h(z)+(-1)^{m}\overline{D_{\lambda}^{m}g(z)}\,(n,m\in N),$$

其中

$$D_{\lambda}^{m}h(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(1+(k-1)\lambda\right)^{m}a_kz^k,\ D_{\lambda}^{m}g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+(k-1)\lambda\right)^{m}b_kz^k,|b_1|<1.$$

若函数 $f(z)=h+\overline{g}\in S_H$ 满足条件

$$\operatorname{Re}\frac{D_{\lambda}^{n+m}f(z)/D_{\lambda}^{n}f(z)}{\alpha\left(D_{\lambda}^{n+m}f(z)/D_{\lambda}^{n}f(z)\right)+1-\alpha}>\beta, z\in D.$$

则称 $f(z)\in SJ_H(n,m,\lambda,\alpha,\beta)$，讨论调和单叶函数类 $SJ_H(n,m,\lambda,\alpha,\beta)$ 的性质.

9. 设 $0\le\alpha, 0\le\beta<1$, b 为非零复数，若函数 $f(z)\in S_{\overline{H}}$ 满足条件

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{1}{b}\left[(1-\alpha)\frac{D_{\lambda}^{n}h(z)+D_{\lambda}^{n}g(z)}{z}+\alpha\left[D_{\lambda}^{n}h(z)+D_{\lambda}^{n}g(z)\right]'-1\right]\right\}>\beta.$$

其中的 $D_{\lambda}^{n}h$ 和 $D_{\lambda}^{n}g$ 适合（4.6.2）式，则称 $f(z)\in SHP_{\lambda}(b,\alpha,\beta)$.

若函数 $f=h+\overline{g}\in SHP_{\lambda}(\alpha,\beta)$ ，$h(z)$ 和 $g(z)$ 满足条件

$$h(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|z^k\text{ ， }g(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|z^k\text{，}$$

则称 $f(z)\in SHP_{\lambda}^{-}(b,\alpha,\beta)$. 讨论函数类 $SHP_{\lambda}(b,\alpha,\beta)$ 的性质.

10. 如何用乘积算子刻画特殊解析函数性质？如何将单叶调和函数的性质推广到亚纯函数类？从简单的函数考虑.

参 考 文 献

[1] Г.М.鲁辛（陈建功译）. 复变函数几何理论，科学出版社，1956.

[2] L.V.阿尔福斯（张立、张靖译）复分析.上海科技出版社，1984.

[3] Ch. 泊茂仁克（杨维奇译）.单叶函数.北京：科学出版社，1987.

[4] Duren P.L. Univalent functions .Springer-Verlag. 1983.

[5] 刘书琴著. 单叶函数，西北大学出版社，1988.

[6] 余家荣 路见可 主编. 复变函数专题选讲（一），高等教育出版社，1993.

[7] 张南岳 陈怀惠 编著. 复变函数论选讲，北京大学出版社，1995.

[8] Nehari.z. THE Schwarzian derivative and Schlicht functions. Bull. Amer. Math. Soc,55 (1949),545-551

[9] 李忠 著. 复分析导引，北京大学出版社，2004.

[10] 李国平 蹇明 著. 算子函数论，武汉大学出版社，1996.

[11] Ruscheweyh St. Linear operators between classes of prestarlike functions. Comment.Math.,Helv.,1977,52:497-509.

[12] CARLSON B C, SHAFFER D B. Shaffers starlaike hypergeometric functions [J]. SIAM J. Math, Aanl. 1984, 15:737-745

[13] 赵业喜. 线性同胚于星象函数的一族解析函数，数学学报 [J]，1997，40（3）：385-394.

[14] 赵业喜. 线性同胚于星象函数的一族解析函数，数学进展(II)[J]，2000，29（1）：26-28.

[15] Miller S S,Mocanu P T. On some classes of firstorder differential subordinations. Michigan Math J,1985,32:185-195

[16] 李书海，关于β级预星象函数的一个子类，陕西师范大学学报（自然科学版），1999，27：49-52.

[17] 李书海，关于β级预星象函数的子族一个不等式，纯粹数学与应用数学，2001，17（1）：81-85.

[18] 刘礼泉 ，关于$\alpha-$星象函数的两个极值，吉林大学自然科学学报，1980，4：107-110.

[19] 马万仓，关于β级的$\alpha-$凸函数，数学学报，1986，29，2：207-212.

[20] 李书海，两族解析函数的极值问题，大学数学，2005，21，5：64-69.

[21] 张玉林 钱富才，Robertson 函数族的极值问题，数学学报，1990，33，5：601-609.

[22] 李书海 木林，有关近于凸函数的一族解析函数，数学杂志，2005，25，4：428-434.

[23] 李书海，一类新的解析函数族，应用泛函分析学报，2005，7，4：344-348.

[24] 李书海 线性同胚于近于凸函数的一族解析函数，黑龙江大学自然科学学报，2000，17，3：6-10

[25] 李书海 用D^{λ}算子定义的缺系数的解析函数类，赤峰学院学报，待发表

[26] Shaffer,D.B.Distortion theorem for special classes of analytic functions. Proc, AMS. 1993,39:281-287

[27] St. Ruschewecyh and T.Sheil-Small;Hadamard products of schlicht functions and Polya-Schoenberg conjecturc, Comment Math.Helv. 1973,48: 119-135

[28] 李书海 木林，用H^{λ}算子定义的一类解析函数，内蒙古师范大学学报，自然科学（汉文版），2004，33，2：118-123.

[29] 李书海，一类解析函数及其α阶组合问题，数学的实践与认识，2004，34，7：126-131.

[30] 李书海，关于一类解析函数的性质，纯粹数学与应用数学，2005，21，1：73-75.

[31] Miller SS,Mocanu P T.Differential subordination and univaient functions. Michigan Math J,1981,28: 157-171.

[32] Rogosinski w w. On the coefficents of subordinate functions.Proc London Math Soc,1943,48: 48-82.

[33] G.S. Salagean, Subclass of univalent functions, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1983,pp.1013, 362-372.

[34] 吴卓人，Hadamard 乘积与共轭点的α－近于凸函数，数学年刊，1995，16A（3）：359-364.

[35] 李书海，用复合算子定义的关于共轭点的一类解析函数的性质，赤峰学院学报，待发表

[36] Ruschewecyh, St.,New criteria for univalent functions.Proc,AMS,1975,9: 109-115.

[37] 李书海，有关p叶预星象函数的一类解析函数，山东师大学报(自然科学版)，2000，15，2：23-25.

[38] 李书海，有关p叶α级预星象函数的一类解析函数的性质，纯粹数学与应用数学，2005，21，3：268-271

[39] 杨定恭，α级星象函数的子类，数学年刊，1987，8A（6）：687-692.

[40] M.K.Aouf,H.M.Hossen, Srivastava, Some families of multivalent functions, Appl.Math.Comput. 39(2000): 39-48.

[41] S.Owa,On certain classes of p-valent functions with negative coefficients,Stevin 59(1985): 385-402.

[42] G.S. Salagean, Subclass of univalent functions, Lecture Notes in Math.,Springer, Berlin, 1983,pp.1013, 362-372.

[43] H. Silverman, univalent functions with negative coefficients,Proc. Amer. Nath. soc.51(1) (1975):109-116.

[44] S.Akbulut et al. On the subclass of p-valently functions . Appl.Math. Comput. 147 (2004): 89-96.

[45] Miller S S,Mocanu P T.Differential Subordinations and ineqalies in the complex plane.J.Differential equations,1987,67:199-211.

[46] Baernstein A.Integrete means,Univalent function and circular symmetrization.Acta Math,1974,133:139-169

[47] 陈红斌,从属函数的积分平均[J].数学学报,1990,33(6): 739-756.

[48] 李书海 代晋军，p叶近于凸函数的一个扩展[J].数学的实践与认识，待发表.

[49] 李书海，关于β级$\alpha+i\mu$型$\lambda-Bazilevic$函数的几个不等式[J]. 数学进展，2004，33，2：169-173.

[50] 李书海，关于p叶α型$\lambda-Bazilevic$函数的性质[J]，黑龙江大学自然科学学报，2004，21.3：40-44

[51] 李书海，关于某类p叶解析函数[J]，大学数学，待发表.

[52] J. Clunie, T, Shei-Small, Harmonic univalent functions[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I, Math. 9(1984): 3-25.

[53] T. Sheil-Srnall, Constants for planar harmonic mappings[J]. J. London Math. Soc. 2(42) (1990):237-248.

[54] H. Silverman, Harmonic univalent functions with negative coefficients[J], J. Math. Anal. Appl. 220(1998): 283-289.

[55] Wang Xiao-Tian, Liang Xiang-Qian, Zhang Yu-Lin, Precise coefficient estimates for close-to-convex harmonic univalent mappings[J]. J. Math Anal and appi, 262(2001): 501-509.

[56] Metin ; ztürk ,Sibel Yal®in. On univalent harmonic functions[J] . J. Inequalities in Pure and Applied Mathematics ,2002 ,(3) :1～8.

[57] Metin *öztürk*, Sibel Yalcin, *Mü* min Yamankaradeniz, Convex subclass ofharmonic Starlike functions[J]. J. Applied Mathematics and Computation. 154(2004): 449-459

[58] Om P. Ahuja, Jay M. Jahangiri, Certain multipliers of univalent harmonic functions[J].J. Applied Mathematics Letters. 18 (2005) 1319–1324

[59] LI Shu-hai, Anew class harmonic univalent functions by the generalized salagean operator, 武汉大学学报（自然科学英文版），2007 年待发表.

[60] F. M. Al-Oboudi, On univalent functions defined by a generalized Salagean operator[J]. J. International Journal of mathematics and mathematical sciences. 27(2004): 1429-1436.

[61] 李书海，用复合算子定义的单叶调和函数类，黑龙江大学自然科学版，待发表.

[62] J. M. Jahangiri, G. Murugusundaramoorthy, K. Vijaya, Salagean-type harmonic univalent functions[J]. South. J. Pure Appl. M ATH. 2(2002): 77-82

[63] F. M. Al-Oboudi, On univalent functions defined by a generalized Salagean operator[J]. J. International Journal of mathematics and mathematical sciences. 27(2004): 1429-1436.

[64] 李书海，用算子定义的缺系数的单叶调和函数类，数学杂志，待发表

[65] 李书海，关于一类解析函数的不等式，东北师大学报（自然科学版）2001，12：9-11.

[66] 李书海　木林，关于 p 叶 *Bazilevic* 函数的一个不等式，武汉大学学报（自然科学版），1999，45，专辑：33-35

[67] 李书海 ·那日苏，一类定义在特殊解析函数族上的积分算子，内蒙古师大学

报（自然科学（汉文）版），2001，30，2：105-109.

[68] Liu Ming Sheng ,On certain subclass of p-valent functions. Soochow Journal of Math ,2000,26.2: 163-171

[69] 李春明，一类定义在 Bazilevich 函数族上的积分算子，黑龙江大学自然科学学报，1992，9，2：26-32

[70] 张玉林，单叶调和映射，数学进展，1993，22，5：402-410.

[71] 胡克　著，单叶函数的若干问题，武汉大学出版社，2001

[72]. 高建福　著，单叶函数与从属原理，中国科学技术大学出版社，2003

[General Information]
□□=□□□□□□
□□=□□□□
□□=263
SS□=11931253
DX□=
□□□□=2007.8
□□□=□□□□□□□□□□

□□
□□
□□
□□

□□□ □□□□□□□□□□□□

1.1 □□□□□□□□□□
1.2 □□□□□□□□□
1.3 □□□□ □□□□
1.4 □□□□ □□□□
1.5 □□□□
1.6 Lindel□f□□ □□□□□□□

□□□ □□□□□□□□□□□□

2.1 □□□□ □□□□□
2.2 □□□□ □□□□
2.3 □□□□□ Bazilevic□□
2.4 □□□Pλ,k□A,B□
□□

□□□ □□□□□□□□□□

3.1 □□□□□□□□□
3.2 □Dλ□□□□□□□□□□A□λ,α,β□
3.3 □Dλ□□□□□□□□□□J□λ,α,β□
3.4 □□□A□α,β,μ□□G□α,β,μ□□□□
3.5 □□□□□□□□□□□□□Bλ□α,β□
3.6 □Dλ□□□□□□□□□□□□□Qk,λ□α,β,ρ□
3.7 □Hλ□□□□□□□□□□
3.8 □□□□□□□□□□□□□□□□□□□
3.9 □Salagean□□□□□λ□K□□□□□□□
□□

□□□ □□□□□□□□□□

4.1 □□P□α□□□□□□□□□□□
4.2 □□γ□□K□□□P□□□
4.3 P□□□□□□□□□□□
4.4 □□□□□□p□λ-Bazilevic□□□
4.5 □□□□p□□□□
4.6 □Salagean□□□□□□□□□□□
4.7 □□□□□□□□□□□□□□□
4.8 □□□□□□□□□□□□□□□□□
□□
□□□□